Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°3 - A remettre le mercredi 3 octobre 2012

« Algèbre Linéaire & Équations différentielles »

Exercice 1

1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right) f'(x) = 4\,x\,f(x). \tag{$\mathcal{E}$}$$

(a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Résolution sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.
Déterminer
- l'ensemble S_1 des solutions sur $]-\infty,-1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
- l'ensemble S_2 des solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
- l'ensemble S_3 des solutions sur $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

(c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

(d) Considérons alors la fonction $g : x \longmapsto x^4-2x^2+1$, puis les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; $f_2(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } -1 < x < -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f_3(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 1 < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Représenter ces fonctions f_1, f_2 et f_3.
Justifier que la famille $\langle f_1,\ f_2,\ f_3\rangle$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

2. On pose $E = \mathbb{R}_4[X]$. On considère Φ l'application définie sur E de la façon suivante :

$$\forall P \in E,\ \Phi(P) = \left(X^2-1\right)\ P' - 4X\,P.$$

(a) Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le noyau de Φ.

(c) Démontrer que l'espace Image de Φ est

$$\operatorname{Im}\Phi = \left\{P = aX^4+bX^3+cX^2+dX+e \Big/ c = 3a+3e\right\}$$

(d) Justifier que l'équation différentielle $\left(x^2-1\right)\ y' - 4\,x\,y = 3x^2+x+1$ admet une unique solution polynômiale de degré inférieur ou égal à trois. *On répondra à cette question sans résoudre l'équation différentielle mais en utilisant les informations sur* $Im\,\Phi$ *et* $\ker\Phi$.

(e) On note $Q = 3X^2+X+1$ et P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = Q$.
Déterminer P.

3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation « $\left(x^2-1\right)\ y' - 4\,x\,y = 3x^2+x+1$ ».
Constituent-elles un espace vectoriel ?

Exercice 2 (Oral Agro 2005)

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y = 2x+3 \tag{1}$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 4y = 2\,|x|+3 \tag{2}$$

3. Montrer que l'équation (2) a une unique solution dont le graphe admette des droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.