Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°6 - A remettre le lundi 12 novembre 2012

« Séries de référence - Polynômes de Lagrange - Séries alternées »

Exercice 1

Donner les valeurs des sommes suivantes. (*Vous préciserez clairement les références de cours et théorèmes utilisés et veillerez à ne pas écrire de sommes de séries avant d'avoir justifié la convergence de ces séries.*)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} ne^{-n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{(-1)^n}{3^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 2

Soient $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux et $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0),\ P(a_1),\ \cdots,\ P(a_n)) \end{array}$

1. Montrer que Φ est linéaire.

2. Montrer que Φ est injective. Φ est-elle surjective ?

3. Soit $(e_k)_{1\le k\le n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Pour chaque entier $k \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$
- justifier l'existence d'un unique polynôme L_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_k) = e_k$.
- Quelles sont les racines de L_k. Déterminer ce polynôme L_k.

4. Montrer que la famille $(L_k)_{1\le k\le n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Que représentent les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ sur cette base

5. <u>Application :</u>
Déterminer l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $P(-2) = 0,\ P(-1) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = 4$.

PROBLEME

<u>Le critère des séries alternées.</u>
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et convergente vers 0.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. (a) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser la monotonie.
Que dire de la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la série de terme général v_n converge.

2. On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer $S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$ puis établir que $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \le u_{n+1}$.

3. <u>Application</u> :

(a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ converge. On pose alors $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(b) Déterminer un rationnel approchant T à 0,1 près.

(c) *Dans la suite, on cherche la valeur exacte du nombre réel T.*

i. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{x^3+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{3k} + \frac{(-1)^n x^{3n}}{x^3+1}$..

ii. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1}\mathrm{d}x = 0$. En déduire que $T = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$.

iii. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{x^3+1} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta x + \gamma}{x^2 - x + 1}$.
En déduire la valeur de T.