Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°7 - A remettre le mercredi 21 novembre 2012

« Intégrale généralisée – Série de terme général $\frac{1}{n^2}$ »

Problème

Préliminaire

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$.

   (b) En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$

   (c) Justifier les inégalité suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

2. Montrer que la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Partie 1

Soient φ et Φ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous nous proposons dans cette première partie de démontrer que

$$A = \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que pour tout réel t : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} t\,e^{-kt} + \varphi(t) \times e^{-nt}$

2. Exprimer en fonction de x et de k l'intégrale $I_k(x)$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ I_k(x) = \int_0^x t\,e^{-kt}\,\mathrm{d}t$$

   Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{x \to +\infty} I_k(x) = \frac{1}{k^2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par R_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = \int_0^x \varphi(t) \times e^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

   Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad 0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{n}$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction R_n admet au voisinage de $+\infty$ une limite finie ℓ_n.
   Justifier les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad 0 \leq R_n(x) \leq \ell_n \leq \frac{1}{n}$

5. Etablir que pour tout réel x positif : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k(x) + R_n(x)$.

- En déduire que la fonction Φ admet une limite finie A au voisinage de $+\infty$.
- Etablir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \ell_n$.

6. Conclure.

Partie 2

1. Montrer que pour tout réel t et tout entier nanturel non nul, on a :

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \times \Big[\cos(t) + \cdots + \cos(nt)\Big] = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(at + bt^2\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$$

3. Dans cette question a et b sont les réels vérifiant la propriété précédente.
On pose : $\forall t \in]0,\pi],\ g(t) = \dfrac{at+bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $g(0) = 2a$.
   (a) Montrer que cette fonction g est continue sur $[0,\pi]$.
   (b) Montrer que cette fonction g est dérivable sur $]0,\pi]$ et expliciter $g'(t)$ pour $t \in]0,\pi]$.
   (c) Vérifier que $g'(t)$ admet une limite finie quand t tend vers 0 par valeurs distinctes de 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

4. Montrer que pour toute fonction h de classe C^1 sur $[0,\pi]$, $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5. En déduire à l'aide des questions précédentes et de la partie I que : $A = \dfrac{\pi^2}{6}$.