Corrigé du devoir maison n^o 8

Le premier affrontement

1. (a) R_B et R_C sont indépendants donc $P(R_B \cup R_C) = P(R_B)+P(R_C)-P(R_B \cap R_C) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

$$\boxed{P(R_B \cup R_C) = \frac{2}{3}}$$

(b) Il s'agit de calculer $P\big(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)\big) = P(\overline{R_A}) \times P(R_B \cup R_C)$ car $\overline{R_A}$ et $R_B \cup R_C$ sont indépendants.

D'après la question précédente, $\boxed{P\big(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)\big) = \left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}}$

(c) R_A et $R_B \cup R_C$ sont indépendants donc $P\big(R_A \cap (R_B \cup R_C)\big) = P(R_A) \times P(R_B \cup R_C) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$$\boxed{P\big(R_A \cap (R_B \cup R_C)\big) = \frac{4}{9}}$$

Probabilités de transition

2. (a) L'événement « $\mathcal{A}_{n+1}$: « A est encore présent à l'issue du $n+1^{\text{e}}$ affrontement »est inclus dans l'événement $\mathcal{A}_n$; de même pour B et C. Comme $ABC_n = \mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}_n \cap \mathcal{C}_n$, pour tout n (y compris $n=0$) $ABC_{n+1} \subset ABC_n$. *En fait, ABC_{n+1} est réalisé si A, B et C sont encore présents à l'issue du $n+1^{\text{e}}$ affrontement ; si c'est le cas, il étaient également présents à l'issue du n^{e}).*

Il en est de même pour $(BC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Tant que A et B ne sont pas éliminés, A tire sur B qui est plus dangereux que C, et B tire sur A pour la même raison, donc personne ne tire sur C. Ainsi C ne peut être éliminé qu'après A ou B. Par conséquent $P(AB_n) = 0$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Cet événement correspond à A B et C n'ont pas été atteints au $n+1^{\text{e}}$ affrontement (sachant qu'ils n'étaient pas encore éliminés à l'issue du n^{e}). La probabilité cherchée est donc celle que A, B et C ratent leur n^{e} tir sachant qu'ils ont déjà raté les précédents.

Donc $P_{ABC_n}\big(ABC_{n+1}\big) = P_{ABC_n}(\overline{R_A^n}\cap\overline{R_B^n}\cap\overline{R_C^n}) = P_{ABC_n}(\overline{R_A^n})\times P_{ABC_n}(\overline{R_B^n})\times P_{ABC_n}(\overline{R_C^n}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$.

(on note R_A^n l'événement « A atteint sa cible au n^{e} affrontement. », $P_{ABC_n}(R_A^n) = P(R_A)$ mais les événements ne sont pas les mêmes ; remarque identique pour B et C.)

(d) C'est la probabilité que seul A rate sa cible au $n+1^{\text{e}}$ tir et que B ou C l'atteignent (A est donc atteint une fois ou deux par B ou C au moins). $P_{ABC_n}\big(BC_{n+1}\big) = P_{ABC_n}\big(\overline{R_A^n} \cap (R_B^n \cup R_C^n)\big) = \frac{2}{9}$.

De façon analogue, B est atteint par A car C tire sur A, et A n'est pas éliminé par B ; donc $P_{ABC_n}\big(AC_{n+1}\big) = P_{ABC_n}\big(R_A^n \cap \overline{R_B^n} \cup \overline{R_C^n})\big) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

(e) $P_{ABC_n}\big(A_{n+1}\big) = P_{ABC_n}\big(B_{n+1}\big) = 0$ car tant que les 3 joueurs sont présents, personne ne tire sur C ; il ne peut pas être éliminé.

Pour que C reste seul, il faut que A atteigne sa cible B *(proba= $\frac{2}{3}$)* et que B ou C atteigne A *(proba égale à celle de $B \cup C$, soit $\frac{2}{3}$)*, les deux événements étant indépendants ; donc $P_{ABC_n}\big(C_{n+1}\big) = \frac{4}{9}$.

(f) Si C est éliminé après B, A restant, c'est qu'au $n+1^{\text{e}}$ affrontement A a touché sa cible et pas C, donc $P_{AC_n}\big(A_{n+1}\big) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

De même, $\quad P_{AC_n}\big(C_{n+1}\big) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad P_{AC_n}\big(AC_{n+1}\big) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$$P_{BC_n}\big(B_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad P_{BC_n}\big(C_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad P_{BC_n}\big(BC_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(g) Sachant que C ne peut être pris pour cible tant que A ou B n'est pas éliminé, on ne peut pas éliminer les 3 joueurs en même temps ; donc $P_{ABC_n}(O_{n+1}) = 0$.
Pour les deux derniers événements, les deux joueurs en lice à l'issue du n^{e} affrontement doivent atteindre leur cible, donc $P_{BC_n}(O_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $P_{AC_n}(O_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Résumé des résultats obtenus

3.

$V =$	O_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V) =$	0	0	0	4/9	0	2/9	2/9	1/9
$P_{AC_n}(V) =$	2/9	4/9	0	1/9	0	0	2/9	0
$P_{BC_n}(V) =$	1/6	0	1/3	1/6	0	1/3	0	0

Suite du tournoi

4. (a) Le tournoi est terminé s'il ne reste plus qu'un joueur (puisqu'il est impossible que les 3 disparaissent en un affrontement), la seule possibilité est donc qu'il reste uniquement C ; c'est à dire que A ait atteint sa cible ainsi que B ou C. $P(\overline{U_1}) = P\big(R_A \cap (R_B \cup R_C)\big) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, donc $P(U_1) = \frac{5}{9}$

(b) $\bigcap_{k=1}^{n} ABC_k = ABC_n$ puisqu'on a une suite décroissante *(pour l'inclusion)* d'événements.
On utilise la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} ABC_k\right) &= P(ABC_1) \times P_{ABC_1}(ABC_2) \times \cdots \times P_{ABC_1 \cap \cdots \cap ABC_{n-1}}(ABC_n) \\ &= P(ABC_1) \times P_{ABC_1}(ABC_2) \times \cdots \times P_{ABC_{n-1}}(ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n \end{aligned}$$

car pour toute valeur de k, $P_{ABC_{k-1}}(ABC_k) = \frac{1}{9}$, donc finalement $P(ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

(c) i. $ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k = ABC_k$ donc $E_{k,n} = ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \ldots \cap AC_n$

ii. Toujours d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(E_{k,n}) &= P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(AC_{k+1}) \times P_{AC_{k+1}}(AC_{k+2}) \times \cdots \times P_{ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \cdots \cap AC_{n-1}}(AC_n) \\ &= P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(AC_{k+1}) \times \cdots \times P_{AC_{n-1}}(AC_n) \end{aligned}$$ *(même raison qu'à la question 4b).*

Or, pour toute valeur de i, $P_{AC_i}(AC_{i+1}) = \frac{2}{9}$ et $P_{ABC_k}(AC_{k+1}) = \frac{2}{9}$, donc

$$\boxed{P(E_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}}$$

<u>*Remarque*</u> *: ce résultat reste vrai pour $n = 0$, car $ABC_0 = \Omega$, de probabilité 1, c'est à dire $(1/9)^0$.*

iii. $E_{k,n}$ est l'événement « Le joueur B est éliminé au $k+1^{\text{e}}$ affrontement, et les joueurs A et C sont encore présents à l'issue du n^{e} », AC_n est l'événement « Le joueur B est éliminé avant le n^{e} affrontement » *("avant" est pris au sens large et on inclut l'élimination au n^{e} affrontement).*

Par conséquent, $AC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_{k,n}$.

iv. Les événements $E_{k,n}$ sont 2 à 2 incompatibles, donc $P(AC_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(E_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}$

$$P(AC_n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9} \times \frac{9}{2}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})}$$

$$\boxed{P(AC_n) = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

On remarque que cette formule reste valable pour $n = 1$, même si dans ce cas il n'y a qu'un événement $E_{k,n}$, ce qui ne sert pas à grand chose pour le calcul de $P(AC_1)$.

(d) Le raisonnement est identique à celui de la question 4c, mais pour le joueur A.

i. $P(F_{k,n}) = P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(BC_{k+1}) \times P_{BC_{k+1}}(BC_{k+2}) \times \cdots \times P_{ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \cdots \cap BC_{n-1}}(BC_n)$
$= P(ABC_k) \times P_{ABC_k}(BC_{k+1}) \times \cdots \times P_{BC_{n-1}}(BC_n)$

Pour tout $i \in [\![k, n-1]\!]$, $P_{BC_i}(BC_{i+1}) = \dfrac{1}{3}$, et $P_{ABC_k}(BC_{k+1}) = \dfrac{2}{9}$ donc

$$\boxed{P(F_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}}$$

ii. $F_{k,n}$ est l'événement « Le joueur A est éliminé au $k+1^{e}$ affrontement, et les joueurs B et C sont encore présents à l'issue du n^{e} », BC_n est l'événement « Le joueur A est éliminé avant le n^{e} affrontement », par conséquent, $BC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} F_{k,n}$ et $P(BC_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(F_{k,n}) = \dfrac{2}{9} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{1}{9}\right)^k \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k-1}$

$$\boxed{P(BC_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n}$$

Comme précédemment, la formule reste valable pour $n = 1$.

(e) Le tournoi n'est pas terminé tant qu'il reste au moins deux joueurs, donc $U_n = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n \cup AB_n$, mais AB_n est l'événement impossible d'après la question 2b, donc $U_n = ABC_n \cup AC_n \cup BC_n$.
Ces événements sont 2 à 2 incompatibles donc $P(U_n) = P(ABC_n) + P(AC_n) + P(BC_n)$
$P(U_n) = \left(\dfrac{1}{9}\right)^n + 2 \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2 \times \left(\left(\dfrac{2}{9}\right)^n - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right)$

5. (a) T_1 est l'événement « Les joueurs A et B sont éliminés à l'issue du premier affrontement », car C ne peut pas être éliminé si A et B sont encore présents. Donc $T_1 = C_1$ et $P(T_1) = \dfrac{4}{9}$

(b) $T_n = U_{n-1} \cap \overline{U}_n = U_{n-1} \setminus U_n$ *(le jeu n'est pas terminé à l'issue du $n-1^{e}$ affrontement mais il l'est à l'issue du n^{e})*. Comme $U_n \subset U_{n-1}$ *(d'après la question 2a)*, il vient

(c) $P(T_n) = P(U_{n-1}) - P(U_n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \times \left(\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}\right) - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 2 \times \left(\left(\dfrac{2}{9}\right)^n - \left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right)$
$= \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 2 \times \left(1 - \dfrac{2}{9}\right) \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1} - 2 \times \left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

6. A gagne le tournoi à l'issue du n^{e} affrontement si B et C sont éliminés à l'issue de cet affrontement ; donc $G_A(n) = A_n \setminus \overline{T}_{n-1}$

(a) C ne pouvant être éliminé dès le premier tour, $G_A(1)$ est l'événement impossible ; $\boxed{P\big(G_A(1)\big) = 0}$

(b) Comme C ne peut être éliminé en premier, lorsque A gagne au n^{e} affrontement, B a nécessairement été éliminé auparavant, donc au plus tard au $n-1^{e}$ affrontement ; ainsi l'événement AC_{n-1} est réalisé ; donc $\boxed{G_A(n) = AC_{n-1} \cap A_n}$

$P\big(G_A(n)\big) = P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(A_n) = 2 \times \left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \left(\dfrac{4}{9}\right)$

(c) Notons G_A l'événement « A gagne le tournoi » ; $G_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_A(n)$ et les événements $G_A(n)$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc $P(G_A) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(G_A(n)\big) = \sum_{n=2}^{\infty} P\big(G_A(n)\big)$, puisque $P\big(G_A(1)\big) = 0$.

$P(G_A) = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2}{9}\right)^n \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 4 \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\dfrac{2}{9}\right)^n - \dfrac{2}{9} \times \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}\right]$

On a une somme de deux séries convergentes (géométriques de raisons $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{9}$) donc

$P(G_A) = 4 \left[\left(\dfrac{2}{9}\right)^2 \times \dfrac{1}{1 - (2/9)} - \left(\dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{9}\right) \times \dfrac{1}{1 - (1/9)}\right]$ donc $\boxed{P(G_A) = \dfrac{1}{7}}$

7. (a) En adoptant des notations similaires pour B, on obtient :
Pour la même raison qu'à la question 6.a, $P\big(G_B(1)\big) = 0$, puis $G_B(n) = BC_{n-1} \cap B_n$ et

$P\big(G_B(n)\big) = P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(B_n) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)$

Enfin, $P(G_B) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(G_B(n)\big) = \sum_{n=2}^{\infty} P\big(G_B(n)\big) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1-(1/3)} - \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{1-(1/9)}$

$$\boxed{P(G_B) = \frac{1}{8}}$$

(b) Le raisonnement est identique, à ceci près que $P\big(G_C(1)\big)$ n'est pas nul et vaut $\frac{4}{9}$ (question 2e).
Pour $n \geqslant 2$, $G_C(n) = (ABC_{n-1} \cap C_n) \cup (AC_{n-1} \cap C_n) \cup (BC_{n-1} \cap C_n)$ et

$$P\big(G_C(n)\big) = P(ABC_{n-1}) \times P_{ABC_{n-1}}(C_n) + P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(C_n) + P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(C_n)$$
$$= \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \times \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{6} + 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{9}$$

(On remarque que la formule est aussi valable pour $n = 1$) et finalement

$$P\big(G_C\big) = \sum_{n=1}^{\infty} P\big(G_C(n)\big) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-(1/9)} + \left(\frac{1}{1-(1/3)} - \frac{1}{1-(1/9)}\right) \times \frac{1}{6} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-(2/9)} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-(1/9)}$$

$$\boxed{P(G_C) = \frac{67}{112}}$$

Remarque : on aurait pu de façon analogue calculer $P(O)$, la probabilité que le tournoi se termine par l'élimination des 3 joueurs et que donc personne ne gagne :
$O_n = (AC_{n-1} \cap O_n) \cup (BC_{n-1} \cap O_n)$ et $P(O_n) = P(AC_{n-1}) \times P_{AC_{n-1}}(O_n) + P(BC_{n-1}) \times P_{BC_{n-1}}(O_n)$.
On obtient $P(O_n) = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \frac{2}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{1}{6}$ et en procédant comme pour A, B et C, on trouve $\boxed{P(O) = \frac{45}{336}}$

On constate alors que $P(G_A) + P(G_B) + P(G_C) + P(O) = 1$, c'est à dire la probabilité que le tournoi se termine (par une victoire ou par l'élimination des 3 protagonistes) est égale à 1, ainsi la probabilité que le tournoi continue indéfiniment est nulle, ce qui est est confirmé par la question suivante.

8. Z prend une valeur finie s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que le tournoi se termine à l'issue du n^{e} affrontement ; $[Z = n]$ est l'événement T_n, ces événements sont 2 à 2 incompatibles donc

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [Z = n]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$$
$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{1-(1/3)}\right) + \left(\frac{14}{9} \times \frac{1}{1-(2/9)}\right) - \left(\frac{16}{9} \times \frac{1}{1-(1/9)}\right) = 1$$

Sous réserve de convergence, $E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P\big([Z = n]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\,n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\,n \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16\,n \times \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\big(1-(1/3)\big)^2}\right) + \left(\frac{14}{9} \times \frac{1}{\big(1-(2/9)\big)^2}\right) - \left(\frac{16}{9} \times \frac{1}{\big(1-(1/9)\big)^2}\right)$$
$$= \frac{51}{28}$$

De même $E(Z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \times P\big([Z = n]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\,n^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\,n^2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^n - 16\,n^2 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$$= \left(\frac{8}{9} \times \frac{1}{\big(1-(1/3)\big)^3}\right) + \left(\frac{14 \times 11}{9^2} \times \frac{1}{\big(1-(2/9)\big)^3}\right) - \left(\frac{16 \times 10}{9^2} \times \frac{1}{\big(1-(1/9)\big)^3}\right) = \frac{3315}{7^2 \times 4^2}$$

D'après le théorème de Koënig-Huygens, $V(Z) = E(Z^2) - \big(E(Z)\big)^2 = \frac{3315}{7^2 \times 4^2} - \frac{51^2}{7^2 \times 4^2} = \frac{714}{7^2 \times 4^2} = \frac{51}{56}$

L'écart type est égal à la racine carrée de la variance, $\sigma(Z) = \sqrt{\frac{51}{56}} \simeq 0,95$