Corrigé du devoir maison n^o 9

Exercice 1

A Les variables aléatoires X_k sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, donc N_1 suit une loi binômiale de paramètres n et p.
De même, les variables aléatoires $1 - X_k$ sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre q, donc N_2 suit une loi binômiale de paramètres n et q.

$N_1 + N_2$ est la variable aléatoire constante égale à n, donc N_1 et N_2 ne sont pas indépendantes.

1. (a) $P(N_1 = n_1 \cap N = n) = P(N = n) \times P_{N=n}(N_1 = n_1) = P(N = n) \times \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n-n_1}$

   (b) $$\begin{aligned} P(N_1 = n_1 \cap N_2 = n_2) &= P(N_1 = n_1 \cap N_2 = n_2 \cap N = n_1 + n_2) \\ &= P(N = n) \times P_{N=n}(N_1 = n_1) \times P_{N=n \cap N_1 = n_1}(N_2 = n_2) \\ &= P(N = n_1 + n_2) \times \binom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1} q^{n_2} \times 1 \end{aligned}$$

   $$\boxed{P(N_1 = n_1 \cap N_2 = n_2) = P(N = n_1 + n_2) \times \binom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1} q^{n_2}}$$

2. $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

   Soit $n_1 \in \mathbb{N},\ [N_1 = n_1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big([N_1 = n_1] \cap [N = n]\big) = \bigcup_{n \geqslant n_1} \big([N_1 = n_1] \cap [N = n]\big)$.

   Les événements $\Big\{[N_1 = n_1] \cap [N = n]\Big\}_{n \geqslant n_1}$ sont deux à deux incompatibles donc

   $P\big(N_1 = n_1\big) = \displaystyle\sum_{n=n_1}^{+\infty} P\big([N_1 = n_1] \cap [N = n]\big) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n-n_1} = \frac{e^{-\lambda} p^{n_1}}{n_1!} \sum_{n=n_1}^{+\infty} \frac{\lambda^n q^{n-n_1}}{(n-n_1)!}$.

   On pose $j = n - n_1$, on obtient $P\big(N_1 = n_1\big) = \dfrac{e^{-\lambda} p^{n_1}}{n_1!} \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+n_1} q^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda} p^{n_1}}{n_1!} \lambda^{n_1} e^{\lambda q} = \frac{e^{-\lambda(1-q)} \lambda^{n_1} p^{n_1}}{n_1!}$.

   Finalement, $P\big(N_1 = n_1\big) = \dfrac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^{n_1}}{n_1!}$, donc $N_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$ et de façon analogue, on montre que

   $\forall n_2 \in \mathbb{N}, P(N_2 = n_2) = e^{-\lambda q} \dfrac{(\lambda q)^{n_2}}{n_2!}$. On vérifie enfin que

   $\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, P(N_1 = n_1 \cap N_2 = n_2) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!} \times \dbinom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1} q^{n_2} \times 1 = P(N_1 = n_1) \times P(N_2 = n_2)$

   Donc les variables N_1 et N_2 sont indépendantes.

3. (a) $a_k\, b_{n-k} = \dfrac{k! P(N_1 = k)}{p^k} \times \dfrac{(n-k)! P(N_2 = n-k)}{q^{n-k}} = \dfrac{n!}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \times P(N_1 = k) \times P(N_2 = n-k)$

   N_1 et N_2 sont indépendantes, donc

   $a_k\, b_{n-k} = \dfrac{n!}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \times P\Big([N_1 = k] \cap [N_2 = n-k]\Big)$

   En prenant $n_1 = k$ (donc $n_2 = n - k$) dans la question 1a, on obtient

   $P\Big([N_1 = k] \cap [N_2 = n-k]\Big) = P(N = n) \times \underbrace{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}_{P_{N=n}(N_1=k)} \times 1$, d'où la formule.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_0\, b_n = a_1\, b_{n-1}$ donc $b_n = \dfrac{a_1}{a_0} b_{n-1}$; (b_n) est une suite géometrique de raison $\dfrac{a_1}{a_0}$.

   De même avec $k = n - 1$ et $k = n$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n\, b_0 = a_{n-1}\, b_1$, donc (a_n) est une suite géometrique de raison $\dfrac{b_1}{b_0}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\big(N_1 = n\big) = \dfrac{b_1}{b_0} \times \dfrac{(n-1)!\, p^{n_1}\, P\big(N_1 = n-1\big)}{n!\, p^{n-1}} = \dfrac{p\, b_1}{b_0} \times \dfrac{P\big(N_1 = n-1\big)}{n}$, et on montre par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\big(N_1 = n\big) = \left(\dfrac{p\, b_1}{b_0}\right)^n \dfrac{P\big(N_1 = 0\big)}{n!}$:

La vérification est immédiate pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $P\big(N_1 = n\big) = \left(\dfrac{p\, b_1}{b_0}\right)^n \dfrac{P\big(N_1 = 0\big)}{n!}$,

$P\big(N_1 = n+1\big) = \dfrac{p\, b_1}{b_0} \times \dfrac{P\big(N_1 = n\big)}{n+1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence,

$P\big(N_1 = n+1\big) = \dfrac{p\, b_1}{b_0} \times \left(\dfrac{p\, b_1}{b_0}\right)^n \dfrac{P\big(N_1 = 0\big)}{(n+1) \times n!} = \left(\dfrac{p\, b_1}{b_0}\right)^{n+1} \dfrac{P\big(N_1 = 0\big)}{(n+1)!}$.

$\boxed{N_1 \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\dfrac{p\, b_1}{b_0}\right), \text{ de façon analogue, } N_2 \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\dfrac{q\, a_1}{a_0}\right), \text{ et par conséquent } N \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\dfrac{p\, b_1}{b_0} + \dfrac{q\, a_1}{a_0}\right)}$

Exercice 2

1. (a) $[I > i] = [X > i] \cap [Y > i]$, X et Y sont indépendantes donc $P\,(I > i) = P\,(X > i) \times P\,(Y > i)$
   L'événement $[X > i]$ est « Les i premières tentatives sont des échecs. »donc $P\,(X > i) = q^i$, de même $P\,(Y > i) = q^i$ et $P\,(I > i) = q^{2i}$.

   (b) $P\,(I = i) = P\,(I > i) - P\,(I > i-1) = q^{2i} - q^{2i-2} = q^{2(i-1)}\,(1 - q^2)$, donc $I \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - q^2)$.

2. (a) $E(I) = \dfrac{1}{1 - q^2}$ *(théorème de cours)*; de plus $E(I+S) = E(I)+E(S) = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}$
   Donc $E(S) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{2}{1-q} - \dfrac{1}{(1-q)\,(1+q)} = \dfrac{2\,q+1}{1-q^2}$.

   (b) $I \times S = X \times Y$, car si $X > Y$ alors $I = Y$ et $S = X$, et lorsque $X < Y$, $I = X$ et $S = Y$.
   $\operatorname{cov}(I, S) = E(I\,S) - E(I)\,E(S) = E(X\,Y) - \dfrac{1}{1-q^2} \times \dfrac{2\,q+1}{1-q^2}$.
   Comme X et Y sont indépendantes, $E(X\,Y) = E(X) \times E(Y) = \dfrac{1}{p^2}$
   $\operatorname{cov}(I, S) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2\,q+1}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}$

3. (a) Soient $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\Big([I = i] \cap [D = d]\Big) = \Big([X = i] \cap [Y = i+d]\Big) \cup \Big([Y = i] \cap [X = i+d]\Big)$.
   • Si $d \neq 0$, cette réunion est disjointe, donc
   $P\Big([I = i] \cap [D = d]\Big) = P\Big([X = i] \cap [Y = i+d]\Big) + P\Big([Y = i] \cap [X = i+d]\Big)$
   X et Y sont indépendantes donc $P\Big([I = i] \cap [D = d]\Big) = P\big(X = i\big) \times P\big(Y = i+d\big) + P\big(Y = i\big) \times P\big(X = i+d\big)$
   $P\Big([I = i] \cap [D = d]\Big) = q^{i-1}\,p \times q^{i+d-1}\,p + q^{i-1}\,p \times q^{i+d-1}\,p = 2\,q^{2\,i+d-2}\,p^2$
   • Si $d = 0$, $P\Big([I = i] \cap [D = 0]\Big) = P\big(X = Y = i]\big) = \Big(q^{i-1}\,p\Big)^2$

   $\boxed{P\Big([I = i] \cap [D = d]\Big) = 2\,q^{2\,i+d-2}\,p^2 \text{ si } d \neq 0 \text{ et } P\Big([I = i] \cap [D = 0]\Big) = \Big(q^{i-1}\,p\Big)^2}$

   (b) $[D = d] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \Big([I = i] \cap [D = d]\Big)$, donc
   • Si $d \neq 0$, $P\big(D = d\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2\,q^{2\,i+d-2}\,p^2 = 2\,q^d\,p^2 \sum_{i=1}^{\infty} q^{2\,(i-1)} = \dfrac{2\,q^d\,p^2}{1-q^2} = \dfrac{2\,q^d\,p}{1+q}$
   • Pour $d = 0$, $P\big(D = 0\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \Big(q^{i-1}\,p\Big)^2 = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p}{1+q}$

Remarque : on vérifie que $\sum_{d=0}^{\infty} P\big(D=d\big)=1$

$$\boxed{\forall d\in\mathbb{N}^*,\ P\big(D=d\big)=\frac{2\,q^d\,p}{1+q} \text{ et } P\big(D=0\big)=\frac{p}{1+q}}$$

(c) Soit $(i,d)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\ P\big(I=i\big)\times P\big(D=d\big)=q^{2(i-1)}\,(1-q^2)\times\dfrac{2\,q^d\,p}{1+q}=2\,q^{2\,i+d-2}\,p^2$ si $d\neq 0$ et

$$=q^{2(i-1)}\,(1-q^2)\times\frac{p}{1+q}=2\,q^{2\,i-2}\,p^2 \text{ si } d=0$$

Dans tous les cas on a bien $\forall(i,d)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\ P\big(I=i\big)\times P\big(D=d\big)=P\Big([I=i]\cap[D=d]\Big)$ donc I et D sont indépendantes.

(d) I et D sont indépendantes donc cov $(I,D)=0$ et cov $(I,S)=$ cov $(I,D)+$cov $(I,I)=V(I)$ *(bilinéarité de la covariance)*, $I\hookrightarrow\mathscr{G}(1-q^2)$ donc $V(I)=\dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}$, on retrouve l'expression obtenue à la question 2b.