Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°9 - A rendre le mercredi 10 décembre 2012

« Loi de Poisson - Loi Géométrique »

EXERCICE 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $q = 1 - p$.

A) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_1 = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $N_2 = \sum_{k=1}^{n}(1 - X_k)$. Quelles sont les lois de N_1 et N_2 ? Les variables aléatoires N_1 et N_2 sont-elles indépendantes [1] ?

B) Dans la suite de l'exercice, on considère N une autre v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que les variables N, X_1, X_2, ..., X_n, ... soient mutuellement indépendantes. On pose :

$$N_1 = \sum_{k=1}^{N} X_k \qquad \text{ce qui signifie} \qquad \forall \omega \in \Omega\,,\ N_1(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

$$N_2 = \sum_{k=1}^{N}(1 - X_k) \qquad \text{ce qui signifie} \qquad \forall \omega \in \Omega\,,\ N_2(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} (1 - X_k(\omega))$$

avec la convention suivante : si $N(\omega) = 0$, alors $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 0$.

1. (a) Pour $(n_1, n) \in \mathbb{N}^2$, exprimer $P(N_1 = n_1 \cap N = n)$ en fonction de $P(N = n)$.

(b) Pour $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(N_1 = n_1 \cap N_2 = n_2)$ en fonction de $P(N = n_1 + n_2)$.

2. On suppose, dans cette question, que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer qu'alors N_1 et N_2 sont indépendantes et préciser leur loi.

3. Réciproquement, on suppose que les variables N_1 et N_2 sont indépendantes et on se propose de déterminer la loi de N. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \frac{n!P(N_1 = n)}{p^n} \qquad b_n = \frac{n!P(N_2 = n)}{q^n} \qquad c_n = n!P(N = n)$$

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $c_n = a_k b_{n-k}$. [2]

(b) En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques. [3]

(c) Conclure quant aux lois de N_1, N_2 et N.

EXERCICE 2

Soient X et Y deux v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant toutes les deux la loi géometrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit $I = \inf(X, Y)$ et $S = \sup(X, Y)$.

1. (a) Calculer $P(I > i)$ pour $i \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que I suit une loi géometrique de paramètre $1 - q^2$.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $E(I)$. En remarquant que $I + S = X + Y$, calculer $E(S)$.

(b) Que vaut $I \times S$? En déduire la valeur de la covariance de I et S.

3. On définit $D = S - I$.

(a) Déterminer la loi du couple (I, D).

(b) En déduire la loi de D.

(c) Montrer que I et D sont indépendantes.

(d) Retrouver ainsi la valeur de $\mathrm{cov}(I, S)$.

---

1. Regarder $N_1 + N_2$.
2. Utiliser la question 1.b. avec $n_1 = k$ et $n_2 = n - k$.
3. Écrire la relation précédente avec $k = 0$ puis $k = 1$