Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°13 - A rendre le mercredi 13 février 2013

« Loi de Pareto - Loi gamma $\gamma(p, \lambda)$ »

On « rappelle » les éléments de cours suivants :

1. Soit f une fonction réelle de variable réelle. On dit que « **f est une densité de probabilité** » si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

   • f est définie sur $\mathbb{R}$. • f est une fonction positive. • $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

2. Si X est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P), on dit que « **X admet pour densité f** » si et seulement si sa fonction de répartition F est définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad f \text{ est une fonction positive définie sur } \mathbb{R}$$

   « **f est alors une densité de probabilité** ».

3. Pour toute variable aléatoire X de densité f_X, les espérances de X et X^2 sont notées respectivement $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(X^2)$ et définies par :

   $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

   sous réserve de convergence de chacune de ces intégrales.
   La variance de X vaut alors : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé (Ω, A, P), on dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{P}([X \leq x] \cap [X \leq y]) = \mathrm{P}(X \leq x) \times \mathrm{P}(X \leq y)$$

Loi de Pareto

1. **La loi $\boldsymbol{\gamma(p, \lambda)}$**

   p et λ désignent dans cette partie deux réels strictement positifs.
   On désigne par $I(p, \lambda)$ l'intégrale :$I(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$ et l'on note $\Gamma(p) = I(p, 1)$.

   (a) Montrer que pour tout x, réel strictement positif : $x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$.
   Montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\int_0^a x^{p-1} dx$ converge.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^a \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$.

   (b) Montrer que pour x suffisamment grand : $0 \leq x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{x^2}$.
   Montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$..

   (c) En effectuant le changement de variable $x = \frac{u}{\lambda}$, montrer que $I(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

(d) Calculer $\Gamma(1)$ et montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
En déduire que pour tout n, entier naturel non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

(e) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g(u) = 0 & \text{si } u < 0 \\ g(u) = \dfrac{1}{\Gamma(p)}\lambda^p u^{p-1} e^{-\lambda u} & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que g est une densité de probabilité.
- Soit U une variable aléatoire admettant g pour densité. Vérifier que son espérance et sa variance valent respectivement : $\mathrm{E}(U) = \frac{p}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(U) = \frac{p}{\lambda^2}$.

Notation : On dira dans la suite du problème qu'une telle variable aléatoire U suit la loi $\gamma(p, \lambda)$.

2. Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie comme suit :

$$\begin{cases} f_X(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f_X(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{\theta+1}{\theta}} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \textit{(loi de Pareto)}$$

(a) Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.
Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable X.

(b) Pour quelles valeurs de θ la variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ? Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ lorsque ces valeurs existent.

(c) Soit $Y = \ln(X)$. On admettra que Y est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_Y.
- Déterminer en fonction de θ l'expression de F_Y.
- En déduire que Y est une variable à densité. Donner une densité f_Y de Y.
- En déduire l'espérance et la variance de Y.

3. **On admettra le résultat de cours suivant :**

> Pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie par :
>
> $$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(w-t) f_V(t)\,dt$$

(a) Vérifier que, si U et V sont à valeurs positives, alors :

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad f_W(w) = \int_0^w f_U(w-t) f_V(t)\,dt$$

(b) Soient Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_n n variables aléatoires **mutuellement indépendantes** toutes distribuées selon la même loi $\gamma(1, \lambda)$ où $\lambda = \frac{1}{\theta}$ et $\theta > 0$.
Déterminer une densité de la somme $Y_1 + Y_2$.
Plus généralement, montrer qu'une densité de la variable aléatoire $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ est :

$$f_n(s) = \frac{s^{n-1}}{\theta^n (n-1)!} e^{-\frac{s}{\theta}} \quad \text{pour } s > 0 \quad \text{et 0 sinon.}$$

Quelle est la loi suivie par S_n ?