Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°14 - A rendre le mercredi 20 février 2013

« Temps d'attente de défaillances - Antirépartition & Espérance »

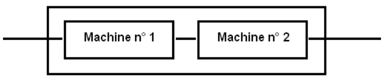
Exercice 1

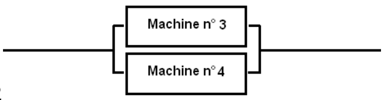
Un dispositif est constitué de machines dont l'état est indépendant de celui des autres. Ces machines peuvent être reliées de différentes façons :

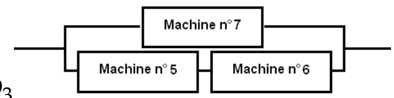
- Ces machines sont dites « en série » , si le dispositif est en panne dès que l'une d'elles est en panne.
- Ces machines sont dites « en parallèle » , si le dispositif est en panne à la seule condition que toutes les machines le soient.

Considérons alors les trois dispositifs suivants :

- Le premier $\mathcal{D}_1$, dispositif « série » , est constitué de deux machines en série.
- Le deuxième $\mathcal{D}_2$, dispositif « parallèle » , est constitué de deux machines en parallèle.
- Le troisième $\mathcal{D}_3$, dispositif « mixte » , est constitué de trois machines .

$\mathcal{D}_1$ 

$\mathcal{D}_2$ 

$\mathcal{D}_3$ 

Hypothèses :

- Toutes les machines sont en état de marche à l'instant $t = 0$..
- La probabilité pour chaque machine de ne pas n'avoir subi aucune panne entre les instants 0 et t vaut $q_t = \exp(-t)$.

Notations :

Le temps d'attente d'une première panne de la machine M_i est un aléa noté X_i. où i varie de 1 à 7.
Les temps d'attente d'une première panne globale sur les dispositifs 1, 2, 3 seront notées respectivement $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$.

1. Dans cette première question, nous considérerons un résultat ω de cette expérience aléatoire pour lequel les valeurs de $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7$ valent respectivement :

$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$X_4(\omega)$	$X_5(\omega)$	$X_6(\omega)$	$X_7(\omega)$
1,09	2,28	1,11	1,80	0,24	2,09	0.26

   - À l'instant t = 1,5 , indiquer les machines puis les dispositifs qui sont déjà tombés en panne.
   - Par un raisonnement analogue, compléter le tableau suivant (dont vous venez de déterminer la colonne t=1,5)

	t = 0	t = 0,5	t = 1	t = 1,5	t = 2	t = 2,5	t = 3
D_1	1						
D_2	1						
D_3	1						

où
- D_1 = 1 si le dispositif 1, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon
- D_2=1 si le dispositif 2, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon
- D_3=1 si le dispositif 3, n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t et vaut 0 sinon

2. De manière générale, que peut-t-on dire de $X_1(\omega)$ si la machine M_1 n'a subi aucune panne entre les instants 0 et t ?
   En déduire en vous appuyant sur les hypothèses la valeur de $P(X_1 \leq t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
   Vérifiez que X_1 suit la Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.
3. Avant de nous lancer dans des calculs compliqués, nous allons faire une simulation du problème à l'aide de l'algorithme ci-joint :

```
function [Y,X]=simulation(Lambda)
for i=1:7
    X(i)=-log(-rand+1)/Lambda;
end
if X(1)<=X(2) Y(1)=X(1); else Y(1)=X(2); end
if X(3)<=X(4) Y(2)=X(4); else Y(2)=X(3); end
```

```
7  if X(5)<=X(6)
8      if X(5)<=X(7) Y(3)=X(7); else Y(3)=X(5); end
9  else
10     if X(6)<=X(7) Y(3)=X(7); else Y(3)=X(6); end
11 end
```

```
1 function S=Stat(N,lambda)
2 S=[0,0,0];
3 for i=1:N
4     Y=simulation(lambda);
5     S=S+Y;
6 end
7 S=S/N;
8 end
```

(a) L'instruction n°3 exécutée pour i =1 et n'est autre que, « **X(1)=-log(rand)/**Lambda ».
Vérifiez que la valeur de X_1 ainsi calculée est aléatoire de Loi exponentielle de paramètre λ =Lambda.

(b) Commenter la ligne 5, puis la ligne 6 du script de la fonction simulation.

(c) Commenter les lignes 7 à 11 du script de la fonction simulation.

(d) Lors de l'exécution de l'instruction Y = Stat(100000,1), nous avons enregistré la réponse suivante :
Y =[0.4995 1.5095 1.1667]
Que réprésente concrétement ces résultats ?

4. Nous allons déterminer les lois des variables Y_1, Y_2, Y_3.

(a) Déterminer les fonctions de répartitions de Y_1, Y_2, Y_3.

(b) Montrer que les variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 admettent des densités.
Précisez ces densités, respectivement f_1, f_2, f_3. Ne reconnaissez-vous pas en l'une d'elle une densité connue ?

(c) Calculer les espérances et les variances de ces variables Y_k

(d) Les résultats obtenus lors des 10000 simulations de l'expérience effectuées à la questions 3d sont-ils conformes aux prévisions ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$.
On note F la fonction de répartition de X.
On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \Big[1 - F(t)\Big]\ \mathrm{d}t - x\ \Big[1 - F(x)\Big]$.

2. On suppose dans cette question que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$

(a) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité : $0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \leq E(X) - \varphi(x)$.

(b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ \Big[1 - F(x)\Big] = 0$. Prouver alors $E(X) = \int_0^{+\infty} \Big[1 - F(t)\Big]\ \mathrm{d}t$.

3. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big[1 - F(t)\Big]\ \mathrm{d}t$ est convergente.

(a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En désignant par φ' la dérivée de φ, calculer pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $\varphi'(x)$, et en déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Justifier le fait que φ admet une limite en $+\infty$. En déduire que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$.

4. Dresser en une seule phrase le bilan des questions 2 et 3.