Corrigé du devoir maison n^o 15

Problème I

Partie I

1. $U(\Omega) =]0,1[$; la fonction $x \mapsto \sqrt{-2\ln x}$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ vers $]0,+\infty[$ donc $R(\Omega) =]0,+\infty[$. Par conséquent Pour $x \leqslant 0$, $\big[R \leqslant x\big] = \emptyset$ et $P\big(R \leqslant x\big) = 0$.
   Soit $x > 0$: $\big[R \leqslant x\big] = \big[\sqrt{-2\ln U} \leqslant x\big] = \big[0 \leqslant -2\ln U \leqslant x^2\big]$. Comme $\ln U$ est à valeurs dans $]-\infty, 0[$ l'inégalité de gauche est superflue ; donc $\big[R \leqslant x\big] = \big[U \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\big]$.
   $P\big(R \leqslant x\big) = P\big(U \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\big) = 1 - P\big(U < \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\big) = 1 - P\big(U \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\big)$ (car U est une variable à densité). $\forall x > 0$, $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \in]0,1[$ donc $F_U\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Finalement, $P\big(R \leqslant x\big) = 1 - F_U\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

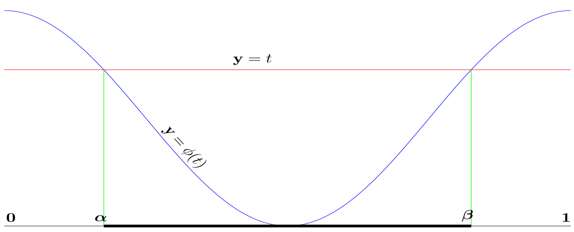
$$\boxed{F_R(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \text{ ; } F_R(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x > 0}$$

2. La fonction de répartition de R est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc R est une variable à densité dont une densité est nulle sur $]-\infty, 0[$; et pour $x \geqslant 0$, $g(x) = F_R'(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Sous réserve de convergence, $E(R) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
   Or, on sait *(résultat de cours, variance d'une variable suivant la loi $\mathscr{N}(0,1)$)* que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$.
   On a donc une intégrale convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   De même, $E(R^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
   On intègre par partie sur un segment du type $[0, A]$, où A est un réel strictement positif quelconque : $\displaystyle\int_0^A t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^A + \int_0^A 2\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^A = -(A^2+2)\,\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + 2$.
   Par passage à la limite lorsque $A \to +\infty$, on obtient bien une intégrale convergente et $E(R^2) = 2$.

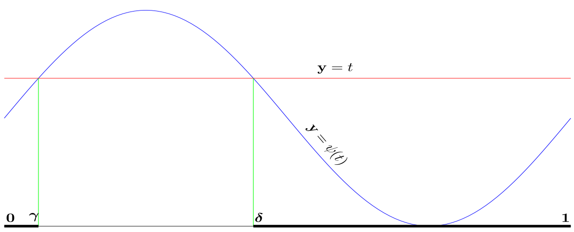
Partie II

1. (a) (b)



   (c) $P\big(C \leqslant t\big) = P\big(\alpha \leqslant V \leqslant \beta\big) = \beta - \alpha$ où α et β sont définis par : $t = \cos\big(2\pi\alpha\big) = \cos\big(2\pi\beta\big)$ et plus précisément, $\alpha = \dfrac{\operatorname{Arccos} t}{2\pi}$ et $\beta = 1 - \alpha$. Donc $P\big(C \leqslant t\big) = 1 - 2\alpha = 1 - \dfrac{\operatorname{Arccos} t}{\pi}$

2. (a) (b)



(c) • Soit $t \in]0,1[$ $P\big(S \leqslant t\big) = P\big(0 \leqslant V \leqslant \gamma\big) + P\big(\delta \leqslant V \leqslant 1\big) = \gamma + 1 - \delta$ où γ et δ sont définis par : $t = \sin\big(2\,\pi\,\gamma\big) = \sin\big(2\,\pi\,\delta\big)$, plus exactement $\gamma = \dfrac{\text{Arcsin}\,t}{2\,\pi}$ et $\delta = \dfrac{1}{2} - \gamma$.

Donc $P\big(S \leqslant t\big) = \dfrac{1}{2} + 2\,\gamma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\text{Arcsin}\,t}{\pi}$.

• Soit $t \in]-1,0]$ $P\big(S \leqslant t\big) = P\big(\gamma \leqslant V \leqslant \delta\big) = \delta - \gamma$ mais comme $t \leqslant 0$, $\gamma = \dfrac{1}{2\,\pi}\big(\pi - \text{Arcsin}\,t\big)$ et $\delta = \dfrac{3}{2} - \gamma$. Finalement on retrouve $P\big(S \leqslant t\big) = \dfrac{3}{2} - 2\,\gamma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\text{Arcsin}\,t}{\pi}$

3. C et S sont à valeurs dans $[-1,1]$ donc pour $t \leqslant 0$, $P\big(S \leqslant t\big) = P\big(C \leqslant t\big) = 0$ et pour $t \geqslant 1$, $P\big(S \leqslant t\big) = P\big(C \leqslant t\big) = 1$. Pour tout $t \in]-1,1[$, on constate que les deux fonctions de répartition sont égales puisque $\text{Arcsin}\,t + \text{Arccos}\,t = \dfrac{\pi}{2}$; c'est aussi le cas de façon évidente pour $t \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$. On constate que la fonction de répartition de ces deux variables est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ donc ce sont des variables à densité. Une densité de ces variables est nulle sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$ et pour $t \in]-1,1[$, $f(t) = F_S'(t) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$.

4. Puisque C et S ont même loi, elles ont donc (sous réserve d'existence) même espérance et variance.
$E(S) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On a une intégrale impropre en 1, convergente car une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ est $t \mapsto -\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}$. Donc $E(S) = \left[-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\right]_{-1}^{1} = 0$.
On calcule de même : $E(S^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ (intégrale doublement impropre).
Soit $A \in]0,1[$, on intègre par parties $\displaystyle\int_0^A \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\sqrt{1-t^2}\Big]_0^A + \int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Le calcul de $\displaystyle\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ peut se faire par changement de variable en posant $\theta = \text{Arcsin}\,t$:
$\displaystyle\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\text{Arcsin}\,A} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\text{Arcsin}\,A} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ car $\cos\theta \geqslant 0$ pour $\theta \in [0, \text{Arcsin}\,A]$.
Donc $\displaystyle\int_0^A \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\text{Arcsin}\,A} \frac{1+\cos(2\,\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\,\theta)}{4}\right]_0^{\text{Arcsin}\,A}$
Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to 1}\int_0^A \frac{t^2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Big[-t\sqrt{1-t^2}\Big]_0^1 + \left[\frac{\theta}{2\,\pi} + \frac{\sin(2\,\theta)}{4\,\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$; et par parité de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{\pi\sqrt{1-t^2}}$, $E(S^2) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Donc S a une variance et

$$\boxed{E(S) = 0 \text{ et } V(S) = \frac{1}{2}}$$

Partie III

1. $|Z|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ou plus précisément dans $I \cap \mathbb{R}^+$; soit $t \geqslant 0$: $\big[|Z| \leqslant t\big] = \big[-t \leqslant Z \leqslant t\big]$ donc $P\big(|Z| \leqslant t\big) = P\big(-t \leqslant Z \leqslant t\big) = P\big(-t < Z \leqslant t\big)$ *(car Z est une variable à densité)* $= F_Z(t) - F_Z(-t)$. La fonction de répartition de $|Z|$ est continue en 0, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ *(comme somme de fonctions qui le sont)*, sur $\mathbb{R}^-$ également *(c'est la fonction nulle)*, donc $|Z|$ est une variable à densité, dont une densité *(nulle sur $\mathbb{R}^-$)* est égale pour $t \in \mathbb{R}^+$ à : $F_Z'(t) - \big(-F_Z'(-t)\big) = 2\,h(t)$ si $h = F'$ est paire.
2. Si Z est à valeurs strictement positives, alors $\ln Z$ est bien définie et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\big[\ln Z \leqslant t\big] = \big[Z \leqslant \mathrm{e}^t\big]$ donc $P\big(\ln Z \leqslant t\big) = P\big(Z \leqslant \mathrm{e}^t\big) = F_Z\big(\mathrm{e}^t\big)$, d'où $k(t) = \mathrm{e}^t\,h\big(\mathrm{e}^t\big)$.
3. Quel que soit l'univers image de Z, $\exp(Z)$ est bien définie, à valeurs dans $]0,+\infty[$ donc sa fonction de répartition est nulle sur R^- et $\forall t > 0$, $\big[\exp(Z) \leqslant t\big] = \big[Z \leqslant \ln t\big]$ donc $P\big(\exp(Z) \leqslant t\big) = P\big(Z \leqslant \ln t\big) = F_Z(\ln t)$, donc $k(t) = \dfrac{1}{t}\,h(\ln t)$.

Partie IV

1. U et V sont indépendantes donc $\sqrt{-2\ln U}$ et $\cos(2\pi V)$ sont indépendantes, ainsi que $\sqrt{-2\ln U}$ et $\sin(2\pi V)$. L'espérance du produit de deux variables indépendantes est égal au produit des espérances, or on a déjà calculé toutes ces espérances. Il en va de même pour la variance.
   $E(X) = E(R)\,E(C) = 0$, de même $E(Y) = 0$. $E(X^2) = E(R^2)\,E(C^2) = 1 = E(Y^2)$
2. X et Y ne sont pas égales, on a même $X^2 + Y^2 = -2\ln U$, or on n'a pas évidemment, $X = Y = \sqrt{-\ln U}$!
3. • La densité de C est paire donc on peut appliquer le résultat de la question **III** 1 :
   $k(t) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ si $t \in]-1,1[$ et $k(t) = 0$ sinon.

   • De même par la question **III** 2, on a $\forall t \in]-\infty, 0[,\ f_1(t) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^t}{\pi\sqrt{1-\mathrm{e}^{2t}}}$, et f_1 est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

   • Connaissant une densité de R, on obtient $\forall t \in \mathbb{R},\ f_2(t) = \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^t \times \exp\left(\dfrac{-\left(\mathrm{e}^t\right)^2}{2}\right) = \mathrm{e}^{2t} \times \exp\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{2t}}{2}\right)$.
4. On utilise le résultat donné en préliminaire : $\forall z \in \mathbb{R},\ f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,f_2(z-t)\,\mathrm{d}t$, et comme f_1 est nulle pour $t \geqslant 0$, $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2\,\mathrm{e}^t}{\pi\sqrt{1-\mathrm{e}^{2t}}} \times \mathrm{e}^{2(z-t)} \exp\left(\frac{-\mathrm{e}^{2(z-t)}}{2}\right)\mathrm{d}t$.
   On pose $u = \sqrt{\mathrm{e}^{-2t}-1}$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}-1}}{\mathrm{e}^{-2t}}\mathrm{d}u$, d'où $f_Z(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{2z}}{\pi} \exp\left(\frac{-(u^2+1)\,\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)\mathrm{d}u = \frac{2\,\mathrm{e}^{2z}}{\pi}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2\,\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)\mathrm{d}u$. On pose à présent $v = u\,\mathrm{e}^z$, d'où
   $f_Z(z) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2z}}{\pi}\exp\left(-\dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi}\exp\left(z - \frac{\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)\underbrace{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}\,\mathrm{d}v}_{\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(z - \frac{\mathrm{e}^{2z}}{2}\right)$
5. (a) $Z = \ln|C| + \ln R = \ln\big(R\,|C|\big)$ donc $R \times |C| = \exp(Z)$. D'après la question III 3, une densité de $R \times |C| = \exp(Z)$ est nulle pour $t \leqslant 0$ et vaut lorsque $t > 0$: $\dfrac{1}{t} \times \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\exp\left(\ln t - \dfrac{\mathrm{e}^{2\ln t}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$
   En notant k une densité de $R\,|C|$, on a donc :
   $$\boxed{k(t) = 2\,\varphi(t) \text{ si } t > 0 \text{ et } k(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0}$$
   (b) On calcule la fonction de répartition de $R \times |C|$: pour $t \leqslant 0$ $P\big(R\,|C| \leqslant t\big) = 0$ et :
   pour $t > 0$, $P\big(R\,|C| \leqslant t\big) = \displaystyle\int_0^t 2\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^t 2\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{-\infty}^0 2\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\Phi(t) - 1$
   $\big[-t \leqslant X \leqslant t\big] = \big[|X| \leqslant t\big] = \big[R\,|C| \leqslant t\big]$, donc $P\big(-t \leqslant X \leqslant t\big) = P\big(R\,|C| \leqslant t\big) = 2\,\Phi(t) - 1$
   (c) La densité de C est paire, donc la loi de C est la même que celle de $-C$; les variables R et C sont indépendantes donc la loi de $R\,C$ et la loi de $-R\,C$ sont les mêmes. Ainsi, $P\big(X > t\big) = P\big(-X < -t\big) = P\big(X < -t\big)$.
   (d) L'égalité précédente entraine $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - F_X(t) = F_X(-t)$; or la formule obtenue à la question 5b peut aussi s'écrire $\forall t > 0,\ F_X(t) - F_X(-t) = 2\,\Phi(t) - 1$. En combinant les deux, on a : $\forall t > 0,\ F_X(t) = \Phi(t)$, puis en réutilisant $F_X(-t) = 1 - F_X(t) = 1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$, on a l'égalité des fonctions de répartition sur $\mathbb{R}$ (donc des lois de probabilité).
6. On a bien montré que X et Y sont indépendantes et que $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$; le raisonnement est identique pour Y, on a donc effectivement démontré le résultat annoncé.

Problème II

Exercice I

1. (a) g est deux fois dérivable comme composée de fonctions qui le sont :
   $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \mathrm{e}^t\,f'(\mathrm{e}^t),\ g''(t) = \mathrm{e}^t\,f'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t}\,f''(\mathrm{e}^t)$

(b) En fait il vaut mieux calculer f' et f'' en fonction de g' et g'' : on pose $\forall t \in \mathbb{R}, x = \mathrm{e}^t$, $(x \in]0, +\infty[)$, et $\forall x > 0,\ f(x) = g(\ln x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}\, g'(\ln x),\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}\, g'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2}\, g''(\ln x)$.
En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, on a : $\forall x > 0,\ g''(\ln x) + g(\ln x) = \sin(\alpha\ \ln x)$, d'où en revenant à la variable t : $\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + g(t) = \sin(\alpha\, t)$.

(c) La solution générale de l'équation homogène associée est : $t \mapsto A\ \cos t + B\ \sin t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Come $\sin(\alpha\, t) = \Im m\left(\mathrm{e}^{i\alpha t}\right)$, on distinque les cas $\alpha = \pm 1$ des autres valeurs :
• $\alpha = \pm 1$: on cherche une solution particulière sous la forme $g_0 :\ t \mapsto C\, t\ \cos t + D\, t\ \sin t,\ (C, D) \in \mathbb{R}^2$.
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0'(t) = C\ \cos t - C\, t\ \sin t + D\ \sin t + D\, t\ \cos t$ puis
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0''(t) = -2\, C\ \sin t - C\, t\ \cos t + 2\, D\ \cos t - D\, t\ \sin t$, d'où par identification :
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0(t) = -\dfrac{\alpha}{2}\, t\ \cos t$ pour $\alpha = \pm 1$

$$\boxed{\text{La solution générale de } (\mathcal{E}') \text{ pour } \alpha = \pm 1 \text{ est } t \longmapsto \left(A - \frac{\alpha\, t}{2}\right) \cos t + B\ \sin t}$$

• $\alpha \neq \pm 1$: on cherche une solution particulière de la forme $g_0 :\ t \mapsto C\ \cos(\alpha\, t) + D\ \sin(\alpha\, t),\ (C, D) \in \mathbb{R}^2$.
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0'(t) = -\alpha\, C\ \sin(\alpha\, t) + \alpha\, D\ \cos(\alpha\, t)$ puis
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0''(t) = -\alpha^2\, C\ \cos(\alpha\, t) - \alpha^2\, D\ \sin(\alpha\, t)$, d'où par identification :
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_0(t) = \dfrac{1}{1 - \alpha^2}\ \sin(\alpha\, t)$.

$$\boxed{\text{La solution générale de } (\mathcal{E}') \text{ pour } \alpha \neq \pm 1 \text{ est } t \longmapsto A\ \cos t + B\ \sin t + \frac{\sin(\alpha\, t)}{1 - \alpha^2}}$$

(d) En revenant à f et à la variable x, on a $f(x) = g(\ln x) = \left(A - \dfrac{\alpha\ \ln x}{2}\right) \cos(\ln x) + B\ \sin(\ln x)$ si $\alpha = \pm 1$
et $f(x) = A\ \cos(\ln x) + B\ \sin(\ln x) + \dfrac{\sin(\alpha\ \ln x)}{1 - \alpha^2}$

2. On vérifie que les solutions possibles trouvées à la question précédente sont bien solution de $(\mathcal{E})$.

Exercice II

1. f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ donc si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors c'est un point critique de f.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4\,(x^3 - x + y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4\,(y^3 + x - y)$, donc $M(x_0, y_0)$ est un point critique si et seulement si :
$\left\{\begin{array}{l} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{array}\right.$, d'où $x^3 + y^3 = 0$ puis $x^3 - 2\,x = y^3 - 2\,y = 0$. Finalement on obtient 3 points critiques : $(0, 0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
– Étude en $(0, 0)$: $f(0, 0) = 0,\quad f(x, x) = 2\,x^4 \geqslant 0$ et $f(x, -x) = 2\,x^4 - 8\,x^2 = 2\,x^2\ \underbrace{(x^2 - 4)}_{<0 \text{ pour } x \to 0}$.
f n'a pas un signe constant au voisinage de $(0, 0)$ donc ce n'est pas un extremum local.
– Étude en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ et en posant $x = \sqrt{2} + h,\ y = -\sqrt{2} + k$, on obtient :
$$\begin{aligned} f(\sqrt{2} + h, -\sqrt{2} + k) f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) &= h^4 + k^4 + 4\sqrt{2}\, h^3 - 4\sqrt{2}\, k^3 + 10\, h^2 + 10\, k^2 - 2\, h\, k \\ &= (h - k)^2 + h^2\,(h^2 + 4\sqrt{2}\, h + 8) + k^2\,(k^2 - 4\sqrt{2}\, k + 8). \end{aligned}$$
lorsque $(x, y) \to (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, c'est à dire lorsque $(h, k) \to (0, 0)$, $h^2 + 4\sqrt{2}\, h + 8$ tend vers 8 –donc est positif au voisinage de $(0, 0)$; de même pour $k^2 - 4\sqrt{2}\, k + 8$. On a donc une somme de 3 termes positifs ; par conséquent, f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
– Étude en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: l'étude est identique car d'une manière générale, $f(x, y) = f(y, x)$; f a donc aussi un minimum local en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
– $\sqrt{2} \notin [0, 1]$ donc f n'a pas d'extremum local sur $[0, 1]^2$. Un extremum est donc nécessairement sur le bord de ce domaine.
Soit $\phi(y) = f(1, y) = y^4 - 2\,y^2 + 4\,y - 1,\ \phi'(y) = 4\,y\,(y^2 - y + 1)$ est du signe de y. Donc ϕ admet un minimum en 0 et est maximale en 1 ; $\phi(1) = 2$.
$\psi(y) = f(0, y) = y^4 - 2\,y^2$ est maximale pour $y = 0$, et $\psi(0) = 0$.
L'échange des variables x et y donne la même chose (car $f(x, y) = f(y, x)$) donc finalement f atteint son maximum en un unique point du domaine : $(1, 1)$.