Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°16 - A rendre le mercredi 27 mars 2013

« Système différentiel - Couples à densité »

Problème I

Dans tout ce problème, on considère une fonction V définie sur $]0,+\infty[^2$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe deux fonctions φ et ψ dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2\,,\; V(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \qquad (1)$$

(a) Expliciter la relation suivante à l'aide des dérivées de φ et ψ :

$$(E) \qquad x^2(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y(1-x)^2\frac{\partial V}{\partial y}(x,y)$$

(b) Déterminer deux fonctions φ et ψ telles que V soit solution de (E).

2. On considère le système (S) de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2\,(1-y) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y\,(1-x)^2 \end{cases}$$

où x et y sont deux fonctions de la variable t de dérivées respectives $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

(a) Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que si x et y vérifient le système (S), alors, les fonctions $t \mapsto x(t+T)$ et $t \mapsto y(t+T)$ vérifient aussi (S).

(b) Montrer que si V satisfait à (E) et si x et y vérifient (S) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $t \mapsto V\,(x(t), y(t))$ est constante.

3. On suppose, dans cette question uniquement, que la fonction V est définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2\,,\; V(x,y) = x - y + \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{x} + 5$$

(a) Montrer que V possède des dérivées partielles d'ordre 2, et calculer ces dérivées partielles.

(b) Montrer que V ne peut posséder d'extremum local qu'en un seul point, que l'on déterminera.

(c) V admet-elle un extremum en ce point ?

(d) Dessiner l'allure de la surface d'équation cartésienne $z = V(x,y)$.

4. *Nous admettrons que (S) admet un unique couple de solutions X et Y définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives telles que $X(0) = 2$ et $Y(0) = 1$.*
Soit $(X : t \longmapsto X\,(t)\,, Y : t \longmapsto Y\,(t))$ cet unique couple de solutions.

(a) Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\; \frac{e^{Y(t)}}{Y(t)} = \frac{K}{X^2(t)} \times e^{X(t) - \frac{1}{X(t)}}$$

(b) Considérons les fonctions u et v définies sur $]0,+\infty[$ par : $u(t) = \frac{e^t}{t}$ et $v(t) = \frac{4}{\sqrt{e}} \times \frac{e^{t-\frac{1}{t}}}{t^2}$.
Représenter sommairement sur un même schéma les courbes représentatives de u et v.
Etablir alors les points suivants :

i. $\forall t \in \mathbb{R}$, $2 \leq X(t)$ et $0 \leq Y(t)$.

ii. Étant donné $x \in]2, +\infty[$, l'équation en y

$$\frac{e^y}{y} = \frac{4}{\sqrt{e}} \times \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

possède exactement deux solutions positives $a(x)$ et $b(x)$ tel que : $0 < a(x) < 1 < b(x)$.

iii. Si t est un réel vérifiant $X(t) = 2$, alors, on a $Y(t) = 1$, $X'(t) = 0$ et $Y'(t) = -1$.

(c) Donner l'allure de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{cases}$.

Problème II

Dans ce problème, nous allons nous exercer à représenter les domaines les plus classiques de $\mathbb{R}^2$ afin d'utiliser au mieux le théorème sur les couples de variables aléatoires à densité rappelé ci-dessous

Théorème : Soient X et Y deux variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Nous supposerons que le couple (X, Y) **est un couple de densité $f_{X,Y}$ connue**.
Si D est un domaine de $\mathbb{R}^2$, la probabilité que l'évenement $[(X,Y) \in D]$ soit réalisé vaut :

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy$$

Dans ce problème, nous désignerons par f_X et f_Y les densités respectives des variables X et Y

Partie 1

Dans cette partie nous supposerons que : $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_X(y)$ où X et Y suivent la même Loi Uniforme sur $[0,6]$

1. Représenter le domaine $D_1 = \left\{(x,y) \in [0,6] \times [0,6] \,/\, |x-y| \le 1\right\}$

2. En déduire à l'aide du théorème de référence $P(|X-Y| \le 1)$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[(X,Y) \in D_1]$ soit réalisé.

Partie 2

Dans cette partie nous supposerons que : $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_X(y)$ où X et Y suivent la même Loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Représenter le domaine $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{y}{x} \le 1\right\}$

2. En déduire à l'aide du théorème de référence $P\left(\frac{Y}{X} \le 1\right)$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[(X,Y) \in D_2]$ soit réalisé.

Partie 3

Dans cette partie nous supposerons que : $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_X(y)$ où X et Y suivent la même Loi esponentielle de paramètre λ.

1. Représenter le domaine $\Delta_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,/\, x + y \le 1\right\}$ où z est un réel positif fixé arbitraire.

2. En déduire à l'aide du théorème de référence $P(X+Y \le z)$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[(X,Y) \in \Delta_z]$ soit réalisé.

3. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = X + Y$, puis une densité de Z.

Partie 4

Dans cette partie nous supposerons que la fonction $f_{X,Y}$ est constante sur le domaine $\mathcal{T}$ intérieur au triangle de sommets $A = (1,1)$, $B = (3,5)$ et $C = (4,3)$ et nulle en dehors de ce domaine, autrement dit :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad (x,y) \in \mathcal{T} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Exprimer en fonction de k l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ de cette fonction $f_{X,Y}$.

2. Que pensez-vous de l'événement $\left[(X,Y) \in \mathbb{R}^2\right]$. En déduire la valeur de k.

3. Soit x un réel quelconque.
- Représenter le domaine $\Delta_x = \left\{(u,v) \in \mathcal{T} \,/\, u \le x\right\}$.
- En déduire à l'aide du théorème de référence $P(X \le x)$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[X \in \Delta_x]$ soit réalisé.

On pourra pour traiter ces deux questions envisager les quatre cas : $x < 1,\ 1 \le x \le 3,\ 3 \le x \le 4,\ 4 < x$.

4. En déduire la fonction de répartition de X, une densité de X et l'espérance de X.

5. Déterminer de la même manière la fonction de répartition de Y, une densité de Y et l'espérance de Y.

6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?