# Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

## DM N°6 - A remettre le mardi 19 novembre 2013

## « Règle de d'Alembert pour la convergence des séries »

---

*Si vous manquez de temps, il vous est conseillé de privilégier les questions A-3.a, A-3.b et la partie B dans son intégralité !*

### Partie $A$

Dans tout cette partie, on considère une suite $(U_n)$ de réels strictement positifs.

**1**. Nous supposerons ici que la suite $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ tend vers un réel $\ell \in [0,1[$.

(a) On pose $\alpha = \frac{1+\ell}{2}$. Montrer qu'il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_0 \, , \, U_{n+1} \leq \alpha U_n$.

(b) Démontrer que : $\forall n \geq N_0 \, , \, U_n \leq \alpha^{n-N_0} U_{N_0}$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum U_n$.

**2**. Nous supposerons ici que la suite $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ tend vers un réel $\ell > 1$.

(a) On pose $\alpha = \frac{1+\ell}{2}$. Montrer qu'il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_0 \, , \, U_{n+1} \geq \alpha U_n$.

(b) En déduire la limite de la suite $(U_n)$.

(c) Déterminer la nature de la série $\sum U_n$.

**3**. Nous supposerons ici que la suite $\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ tend vers 1.

(a) Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n}$ (on donnera une démonstration précise).

(b) Étudier la nature de la série $\sum - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

(c) En déduire que l'on ne peut conclure directement quant à la nature de la série $\sum U_n$.

Nous venons donc de démontrer la règle de d'Alembert pour la convergence des séries : soit $(U_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que la limite de la suite $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ existe. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

▷ Si $\ell < 1$, la série $\sum U_n$ est convergente.
▷ Si $\ell > 1$, la série $\sum U_n$ est divergente.
▷ Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire directement.

### Partie $B$

*Dans cette partie, à la lumière de la démarche précédente mais en se conformant strictement au programme de la classe de BCPST, nous étudierons la nature de plusieurs séries.*

**1**. Soient $a$ et $b$ deux réels quelconques dont le second $b$ est non nul. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$U_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$$

(a) Soit $\theta$ un réel quelconque non nul et $(t_n)$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \theta^n 2^{\sqrt{n}}$.
Discuter selon les valeurs de $\theta$ la limite éventuelle de la suite $\left(\left| \ t_n \ \right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) En déduire les couples $(a,b)$ pour lesquels la série $\sum U_n$ diverge grossièrement.

(c) Nous supposerons ici : $a$ non nul et $|b| > |a|$ .

- Déterminer : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{2\,|a|}{|a|+|b|}\right)^n 2^{\sqrt{n}}$
- En déduire qu'à partir d'un certain rang : . $|U_n| \leq \left(\dfrac{|a|+|b|}{2\,|b|}\right)^n$.
- Quelle est la nature de la série $\sum |U_n|$ ?

(d) Énoncer une conclusion concise sur la nature de la série $\sum U_n$.

**2**. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$V_n = \frac{n^b}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$$

(a) Montrer que la suite $(V_n)$ tend vers 0.

(b) Discuter selon les valeurs de $a$ la limite de la suite $(2^n\ V_n)$.

(c) Justifier qu'à partir d'un certain rang : $V_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(d) Préciser la nature de la série $\sum V_n$.

**3**. On considère la suite $(W_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ et } W_{2k+1} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

(a) Justifier à l'aide du théorème de comparaison des séries à termes positifs, la convergence des séries $\sum W_n$ et $\sum n\ W_n$.

(b) Déterminer leurs sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\ W_n$.

## Partie $C$

*Dans cette partie, nous reprendrons les exemples de la partie B et leur appliquerons, si c'est possible la règle de D'Alembert.*

**1**. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$U_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n 2^{\sqrt{n}} \text{ et } V_n = \frac{n^b}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$$

(a) Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ la règle de d'Alembert permet-elle de déterminer la nature de $\sum U_n$.

(b) Étudier la nature de la série $\sum V_n$ grâce à la règle de d'Alembert.

**2**. On considère la suite $(W_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ et } W_{2k+1} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

La règle de d'Alembert permet-elle de déterminer la nature des séries $\sum W_n$ et $\sum n\ W_n$ ?