Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°1 - A remettre le mercredi 17 Septembre 2014

« Tri par insertion - Comparaison de moyennes - Inégalité de Hölder »

Informatique

Consultez à l'adresse INTERNET suivante : `http://youtu.be/3QwCnoa_6FY` , l'animation présentant le tri par insertion, puis écrire le script d'une fonction qui permette de trier une liste de réels L .

Exercice

Soient x et y deux réels strictement positifs. On définit plusieurs moyennes de x et y :

- Moyenne arithmétique : $a = \dfrac{x+y}{2}$
- Moyenne géométrique : $g = \sqrt{xy}$
- Moyenne harmonique : $h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
- Moyenne quadratique : $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

Classer ces quatre moyennes par ordre croissant en précisant les cas d'égalité. Vous justifierez avec soin et concision votre réponse.

Problème

Dans tout le problème p désigne un réel strictement supérieur à 1 et on note q le réel tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

1.a. Soit m un réel positif et u la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \geq 0,\ u(x) = mx - \dfrac{x^p}{p}$

Montrer que le maximum de u est de la forme : $C\, m^q$, où C est une constante que l'on déterminera.

1.b. En déduire que, pour tout couple (x, y) de réels positifs, on a l'inégalité :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

et que, pour tout réel λ strictement positif, on a aussi l'inégalité :

$$xy \leq \frac{\lambda^p x^p}{p} + \frac{y^q}{q\lambda^q}$$

1.c. Soit n un entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux éléments de $(\mathbb{R}^+)^n$.
Justifier, pour tout réel λ strictement positif, l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q\lambda^q} \sum_{i=1}^{n} y_i^q$$

2.a. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Déterminer le minimum de la fonction v définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $\forall x > 0,\ v(x) = a\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{b}{qx^q}$

2.b. En déduire pour tout couple de n-uplets de réels positifs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$