Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM N°3

« Récursivité - Estimation biaisée - EDL d'ordre 3 à coefficients constants »

Devinette

1. Par linéarité de l'espérance, $E\left(\overline{X}\right) = \dfrac{E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)}{4} = m$

Les variables X_1, X_2, X_3, X_4 sont mutuellement indépendantes, donc

$V\left(\overline{X}\right) = \dfrac{V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)+V(X_4)}{16} = \dfrac{\sigma^2}{4}$

$$\boxed{E\left(\overline{X}\right) = m\ , \quad V\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{4}}$$

2.
- $\Delta_1 = X_1 - \overline{X} = X_1 - \dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4} = \dfrac{3}{4}X_1 - \dfrac{1}{4}X_2 - \dfrac{1}{4}X_3 - \dfrac{1}{4}X_4$
- $E(\Delta_1) = E(X_1) - E\left(\overline{X}\right) = 0$ (par linéarité de l'espérance) et
  $V(\Delta_1) = \dfrac{9}{16}V(X_1) + \dfrac{1}{16}V(X_2) + \dfrac{1}{16}V(X_3) + \dfrac{1}{16}V(X_4) = \dfrac{3}{4}\sigma^2$ (indépendance des X_i).
- $V(\Delta_1) = E\left(\Delta_1^2\right) - E(\Delta_1)^2 = \dfrac{3}{4}\sigma^2 - 0$, donc

$$\boxed{E(\Delta_1) = 0\ , \quad V(\Delta_1) = \frac{3}{4}\sigma^2 = E\left(\Delta_1^2\right)}$$

3. Les calculs pour les variables Δ_2^2, Δ_3^2 et Δ_4^2 sont analogues à ceux de Δ_1^2 et l'on a

$$\boxed{E\left(\Delta_2^2\right) = E\left(\Delta_3^2\right) = E\left(\Delta_4^2\right) = \frac{3}{4}\sigma^2}$$

4. Enfin par linéarité de l'espérance, $E(V) = \dfrac{1}{4}\Big(E\left(\Delta_1^2\right) + E\left(\Delta_2^2\right) + E\left(\Delta_3^2\right) + E\left(\Delta_4^2\right)\Big) = \dfrac{3}{4}\sigma^2$

Problème

1. (a) La dérivée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall f \in E,\ D(f) \in E$.
Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et soient f et g deux fonctions de E, alors :
$D(\alpha\, f + \beta\, g) = (\alpha\, f + \beta\, g)' = \alpha\, f' + \beta\, g' = \alpha\, D(f) + \beta\, D(g)$; donc D est linéaire, de E vers E. $D \in \mathscr{L}(E)$.

(b) Soit $f \in \text{Ker } D$, $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 0$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
Réciproquement, toute fonction constante appartient à Ker D. Donc Ker $D = \text{Vect }(1)$.
Montrons à présent que D est surjective : en effet, toute fonction f de E est continue *(puisque de classe $\mathscr{C}^\infty$)* donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'entre elles ; on a bien $D(F) = f$, donc $f \in \text{Im }(D)$.

2. (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = 0$.
En particulier pour $t = 0 : a + c = 0$

pour $t = \dfrac{2\,\pi}{\sqrt{3}} : e^{\frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}}\, a + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\, c = 0$, en résolvant ce sytème, on obtient $a = c = 0$.

Reste à prendre une valeur de t telle que $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \neq 0$, par exemple $t = 1$, pour en déduire $b = 0$.

$\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = 0\Big) \Longrightarrow (a = b = c = 0)$ donc $\Big(a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 = 0\Big) \Longrightarrow (a = b = c = 0)$
la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est libre.

(b) À l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut écrire :
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2),\ \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3\,t^2}{8} + o(t^2)$ et $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)$

Donc $a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = a + c + (a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2})\, t + (\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4})\, t^2 + o(t^2)$.
Par unicité du développement limité au voisinage d'un point, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + \phantom{\frac{b\sqrt{3}}{2}} \quad c = 0 \\ a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$$

La résolution donne encore $a = b = c = 0$.

(c) Lorsque $t \to +\infty$, f_1 tend vers $+\infty$, f_2 et f_3 sont bornées, en effet :
$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$, et $\left|e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$.

Si $a \neq 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} a\,f_1(t) + b\,f_2(t) + c\,f_3(t) = \pm\infty$ selon le signe de a ; donc $a = 0$. On résout ensuite $\forall t \in \mathbb{R},\ b\,f_2(t) + c\,f_3(t) = 0$, puis en prenant des valeurs particulières de t (0 et $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ par exemple) on retrouve $b = c = 0$.

3. $G = \text{Vect}\ (f_1,\ f_2,\ f_3)$ donc $\dim\ (G) \leqslant 3$. On a montré précédemment (question 2) que la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est libre ; par construction elle engendre G, c'est donc une base de G et $\dim\ (G) = 3$.

4. $\forall t \in \mathbb{R},\ f_1'(t) = e^t,\ \ f_2'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\Big(-\dfrac{1}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\Big)$ et $f_3'(t) = -e^{-\frac{t}{2}}\Big(\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\Big)$. Donc $D(f_1) = f_1,\ D(f_2) = -\dfrac{1}{2}\,f_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,f_3$ et $D(f_3) = -\dfrac{1}{2}\,f_3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,f_2$
Ainsi $D(f_1) \in G,\ D(f_2) \in G$ et $D(f_3) \in G$; par linéarité de D, $\forall f \in G,\ D(f) \in G$.

5. D'après les calculs de la question précédente, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

6. $M^3 = I_3$.

7. $M \times M^2 = M^2 \times M = I_3$ donc M est inversible d'inverse M^2.

8. M est une matrice associée à $\widehat{D}$, M est inversible, donc $\widehat{D}$ est bijectif, c'est un automorphisme de G.

9. M^{-1} est associée à $(\widehat{D})^{-1}$, or $M^{-1} = M^2$ donc $(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D} \circ \widehat{D}$.

Partie II : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

1. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$, on démontre $\forall n \in \mathbb{N},\ f$ est de classe $\mathscr{D}^n$ par récurrence sur n.
Initialisation : par hypothèse, f est de classe $\mathscr{D}^3$, donc la propriété est vérifiée pour $n \leqslant 3$.
Soit $n \geqslant 3$, on suppose que f est de classe $\mathscr{D}^n$; comme $f''' = f$, on en déduit que f''' est de classe $\mathscr{D}^n$, donc $f^{(n+3)}$ existe f est donc de classe $\mathscr{D}^{n+3}$ donc a fortiori de classe $\mathscr{D}^{n+1}$.

2. Soit f une solution polynômiale, supposons f non nulle ; le degré de f''' est alors strictement inférieur à celui de f donc on ne peut pas avoir $f''' = f$. Par conséquent, la seule solution polynômiale est la fonction nulle.

3. On a prouvé à la partie précédente que $\widehat{D}^3 = \text{id}_G$, donc $\forall f \in G,\ D^3(f) = \widehat{D}^3(f) = f$. Ainsi $f \in \text{Ker}\ (T)$ donc $G \subset \text{Ker}\ (T)$.

4. (a) D'après la question 1, g est dérivable. $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f'$ puisque $f''' = f$; donc $g' = g$.

(b) $(\mathcal{E}')$ est une équation différentielle d'ordre 1 à cœfficients constants, les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda\, e^x$ où λ est une constante réelle quelconque.

(c) $y'' + y' + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients constants, l'équation caractéristique associée est : $X^2 + X + 1 = 0$ dont les solutions sont $e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{-\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est la famille $(f_1,\ f_2)$, f_1 et f_2 étant les fonctions définies en préambule du problème.

(d) Une solution particulière de $y'' + y' + y = \lambda\, e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3}\, e^t$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3}\,e^t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(e) Soit donc $f \in \text{Ker}\ (T)$, $f'' + f' + f$ est solution de $(\mathcal{E}')$, donc de la forme $t \mapsto \lambda\, e^t$; ainsi
$f \in \text{Ker}\ (T) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ f'' + f' + f = \lambda\, e^t$; donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$f\ : t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3}\,e^t$.
Finalement, $f \in \text{Ker}\ (T) \Rightarrow f \in G$, et par suite $\text{Ker}\ (T) = G$.