# Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

## DM N°3 - A remettre le mercredi 15 Octobre 2014

**« Récursivité - Estimation biaisée - EDL d'ordre 3 à coefficients constants »**

---

## Informatique - Notion de récursivité

Les fonctions récursives sont fondamentales en Informatique. En voici un exemple :

```
1 def fact(n):
2     if n==0:
3         return 1
4     else:
5         return n*fact(n-1)
```

Vous pouvez constater que dans le script de cette fonction `Fact`, l'instruction en ligne 5 fait appel à cette même fonction `Fact` : c'est en cela que l'algorithme présenté est dit récursif.

---

Nous vous proposons de construire en mode récursif une fonction notée `C` qui au couple d'entier $(n, p)$ associe l'entier `C`$(n, p)$ égal au nombre de combinaisons possibles de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.
Vous vérifierez que le script proposé fournit le résultat suivant :

```
In [1]: C(1000,500)
Out[1]: 270288240945436569515614693625975275496152008446548287007392875106625
4287055221938986124839245023701653626060850215461048022097500506799175498942196
9951847542366548426375173335616246407973788734436457416111949760457104498575
628788051460099421942675236691585660313686260248442810929690586379982121632O
```

## Devinette

On considère quatre variables aléatoires **<u>mutuellement indépendantes</u>** $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ de **même espérance** $m$ et de **même variance** $\sigma^2$.
On pose

$$V = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_3 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_4 - \overline{X}\right)^2}{4} \quad \text{où} \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$$

1. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $\overline{X}$ ? Quelle est la variance de la variable aléatoire $\overline{X}$ ?
2. On pose $\Delta_1 = X_1 - \overline{X}$.
   - Vérifier que $\Delta_1 = \frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 - \frac{1}{4}X_4$.
   - Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $\Delta_1$ ? Quelle est la variance de la variable aléatoire $\Delta_1$ ?
   - En déduire l'espérance de la variable aléatoire $\Delta_1^2$.
3. Préciser de la même manière les espérances des variables aléatoires :

$$\Delta_2^2 = \left(X_2 - \overline{X}\right)^2,\ \Delta_3^2 = \left(X_3 - \overline{X}\right)^2,\ \Delta_4^2 = \left(X_4 - \overline{X}\right)^2.$$

4. En déduire l'espérance de la variable aléatoire $V = \frac{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\left(X_3-\overline{X}\right)^2+\left(X_4-\overline{X}\right)^2}{4}$.

## Problème

Dans tout ce problème, $E$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note $D$ l'application qui à toute fonction associe sa dérivée $D(f) = f'$.
On considère les trois fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ définies par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$$

Enfin, on pose $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

## Partie I - Étude de l'application $D$

1. (a) Démontrer que $D$ est un endomorphisme de $E$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de $D$.
2. Nous allons démontrer dans cette question, par trois méthodes différentes, que la famille $\mathcal{B}$ est libre. On considère pour cela trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.
   (a) *Première méthode :*
   On a : $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$. Choisir habilement trois valeurs de $t$ puis résoudre le système de trois équations aux trois inconnues $a$, $b$ et $c$ obtenu. Conclure.
   (b) *Deuxième méthode :*
   Exploiter le développement limité de $f$ à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Conclure.
   (c) *Troisième méthode :*
   Étudier le comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Conclure.
3. Déterminer une base, ainsi que la dimension, de l'espace $G$.
4. Démontrer que $G$ est stable par $D$, c'est-à-dire que : $\forall f \in G\,,\ D(f) \in G$.

*Dans toute la suite, nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de $G$ induit par $D$, c'est-à-dire :*

$$\widehat{D} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f^{'} \end{array}$$

5. Déterminer la matrice $M$ de $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer $M^3$.
7. Démontrer que $M$ est inversible, et expliciter son inverse $M^{-1}$.
8. Démontrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de $G$.
9. Exprimer $\left(\widehat{D}\right)^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

## Partie II - Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle $y^{'''} = y$, notée $(\varepsilon)$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\varepsilon)$ est une fonction $f$ définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f^{'''}(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution $f$ de $(\varepsilon)$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les solutions polynomiales de $(\varepsilon)$.

*Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}$, où $\mathrm{Id}$ est l'identité de $E$ et $D^3 = D \circ D \circ D$. Le noyau de $T$ est donc l'ensemble des solutions de $(\varepsilon)$.*

3. Démontrer que $G \subset \mathrm{Ker}(T)$.
4. Nous allons maintenant établir que $\mathrm{Ker}(T) \subset G$. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$.
   (a) Démontrer que la fonction $g = f^{''} + f^{'} + f$ est solution de l'équation différentielle
   $$y^{'} = y \qquad (\varepsilon^{'})$$
   (b) Résoudre l'équation $(\varepsilon^{'})$.
   (c) Résoudre l'équation $y^{''} + y^{'} + y = 0$.
   On donnera notamment une base de l'ensemble des solutions.
   (d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$y^{''} + y^{'} + y = \lambda e^t$$
   (e) Conclure.