Corrigé du devoir maison

EXERCICE I

1. Script complété :

```python
import numpy as np
def MatVarCov(X,Y):
    n=len(X)
    SX,SY,SXX,SYY,SXY=0,0,0,0,0
    for k in range(n):
        SX=SX+X[k];
        SY=SY+Y[k];
        SXX=SXX+X[k]**2;
        SYY=SYY+Y[k]**2;
        SXY=SXY+X[k]*Y[k]
    VX=SXX/n-(SX/n)**2
    VY=SYY/n-(SY/n)**2
    COVXY=SXY/n-(SX/n)*(SY/n)
    A=np.matrix([[VX,COVXY],[COVXY,VY]])
    return A
#******************PROGRAMME PRINCIPAL**************
X=[8.8,10.8,12.2,9.7,10.8,11.5,8.1,9.7,14.5,19.2]
Y=[7.6,9.2,9.0,8.3,9.0,12.8,7.8,6.5,13.7,14.9]
A=MatVarCov(X,Y)
print('La matrice de Variance-Covariance de la série Statistique [X,Y] vaut : ')
print(A)
```

L'exécution donne :

```
La matrice de Variance-Covariance de la série Statistique [X,Y] vaut :
[[ 9.5081   7.2746]
 [ 7.2746   7.3776]]
```

$$\text{où}\quad \begin{array}{lcll} V_x & = & 9.5081 & \text{est la variance de la série statistique } X \\ V_y & = & 7.3776 & \text{est la variance de la série statistique } Y \\ V_{xy} & = & 7.2746 & \text{est la covariance de la série statistique double } Y \end{array}$$

Le coefficient de corrélation du couple (X, Y) vaut : $\boxed{R = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{V}(X)}\,\sqrt{\text{V}(Y)}} = \dfrac{7.2746}{\sqrt{9.5081}\times\sqrt{7.3776}} \simeq 0.868\,57}$

2. λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda\, I_2$ non inversible $\iff \det(A-\lambda I) = 0$, or

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 9.5081-\lambda & 7.2746 \\ 7.2746 & 7.3776-\lambda \end{vmatrix} = (9.5081-\lambda)\,(7.3776-\lambda) - (7.2746)^2 = \lambda^2 - 16.8857\lambda + 17.\,2271534$

$\Delta = 16.8857^2 - 4\times 17.2271534 = 216.21825$, donc les racines de ce déterminant sont :

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(16.8857 - \sqrt{\Delta}\right) \simeq 1.0906692 \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(16.8857 + \sqrt{\Delta}\right) \simeq 15.795031}$$

Ces valeurs sont confirmées par l'exécution du script.

3. La détermination de E_{λ_1} conduit à $(9.5081 - \lambda_1)\,x + 7.2746\,y = 0$ donc une base de E_{λ_1} est par exemple le vecteur ${}^t(1\,, -1.1571)$.

On obtient de même un vecteur de E_{λ_2} et finalement

$$\boxed{E_{\lambda_1} = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,-1.1571)\rangle \text{ et } E_{\lambda_2} = \text{Vect}\langle {}^t(1\,,\,0.8642)\rangle}$$

La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1.1571 & 0.8642 \end{pmatrix}$

Les vecteurs propres obtenus par le script sont de norme 1, donc proportionnels à ceux que nous avons calculés.

4. Les vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ de la nouvelle base sont des vecteurs propres de A donc pour f l'endomorphisme canoniquement associé à A on a : $f\left(\vec{U}_1\right) = \lambda \vec{U}_1$ et $f\left(\vec{U}_2\right) = \lambda \vec{U}_2$ donc sa matrice dans la nouvelle base est $P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

5. Une matrice possible vérifiant $M^2 = D$ est $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$, donc en prenant $R = P\,M\,P^{-1}$, on a bien $R^2 = A$ et les valeurs propres de R sont $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$ qui sont positives.
Numériquement, $R \simeq \begin{pmatrix} 2.7216 & 1.4495 \\ 1.4495 & 2.2971 \end{pmatrix}$

6. Comme M est diagonale, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}$ et $R^{-1} = P\,M^{-1}\,P^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 0.55343 & -0.34923 \\ -0.34923 & 0.65571 \end{pmatrix}$,

7. On a $\begin{pmatrix} \mathrm{U} \\ \mathrm{V} \end{pmatrix} = R^{-1} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 8.8 & 10.8 & 12.2 & 9.7 & 10.8 & 11.5 & 8.1 & 9.7 & 14.5 & 19.2 \\ \hline 7.6 & 9.2 & 9.0 & 8.3 & 9.0 & 12.8 & 7.8 & 6.5 & 13.7 & 14.9 \end{array} \right)$
$= \begin{pmatrix} 2.2161 & 2.7642 & 3.6088 & 2.4697 & 2.8340 & 1.8943 & 1.7588 & 3.0983 & 3.2403 & 5.4224 \\ 1.9102 & 2.2609 & 1.6408 & 2.0549 & 2.1297 & 4.3770 & 2.2858 & 0.87458 & 3.9194 & 3.0649 \end{pmatrix}$
L'exécution du programme fournit alors :

```
La liste U vaut :
[2.2160542551595697, 2.7641508271575539, 3.6088064156876771, 2.4696823790455031,
 2.8339974920259681, 1.8943153213569461, 1.7588031284602996, 3.0983023628612338,
 3.2403101658670321, 5.4223744203779995]
La liste V vaut :
[1.9101756400286782, 2.260851916447463, 1.640782396730696, 2.0548656778533458,
 2.129709050809597, 4.376960170889606, 2.2857818327059953, 0.87457988711254897,
 3.9194030932337842, 3.0648636626532424]
```

8.
   - La variance de la série statistique U vaut : $V_u = \dfrac{1}{100} \displaystyle\sum_{k=1}^{10} u_i^2 - \left(\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} u_i\right)^2$
   - De même la variance de la série statistique V : $V_v = \dfrac{1}{10} \displaystyle\sum_{k=1}^{10} v_i^2 - \left(\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} v_i\right)^2$
   - Et la covariance de la série statistique double [U, V] vaut : $V_{uv} = \dfrac{1}{10} \displaystyle\sum_{k=1}^{10} u_i v_i - \left(\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} v_i\right) \times \left(\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} v_i\right)$

   On remarque que $U\,{}^tU = \sum u_i^2$, de même $UV\,{}^tV = \sum v_i^2$ et $U\,{}^tV = V\,{}^tU = \sum u_i v_i$ donc la matrice produit $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} U\,{}^tU & U\,{}^tV \\ V\,{}^tU & V\,{}^tV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum u_i^2 & \sum u_i v_i \\ \sum u_i v_i & \sum v_i^2 \end{pmatrix}$
   En notant K la matrice ligne composée de 10 colonnes de 1, on a :
   $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \end{pmatrix} \times^t K\,K \times \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum u_i)^2 & (\sum u_i)(\sum v_i) \\ (\sum u_i)(\sum v_i) & (\sum v_i)^2 \end{pmatrix}$ donc A la matrice de covariances vaut $A = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix} - \dfrac{1}{100} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \times^t K\,K \times \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \end{pmatrix}$
   Ainsi $B = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \end{pmatrix} - \dfrac{1}{100} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \times^t K\,K \times \begin{pmatrix} {}^tU & {}^tV \end{pmatrix} = R^{-1}\,A^tR^{-1} = R^{-1}\,AR^{-1}$ car R est symétrique. Comme de plus $R^2 = A$, on en déduit $B = I_2$, ainsi $V_u = V_v = 1$ et $V_{uv} = 0$

EXERCICE II

1. f possède 10 valeurs propres distinctes, E est de dimension 10, donc f est diagonalisable et E admet une base constituée de vecteurs propres de f.
2. (a) $g \circ f = g \circ (g \circ g) = (g \circ g) \circ g = f \circ g$ donc g et f commutent.

   (b) Pour tout i on a $f\left(g(\vec{u}_i)\right) = g\left(f(\vec{u}_i)\right) = g\left(\lambda_i \, \vec{u}_i\right) = \lambda_i \, g\left(\vec{u}_i\right)$
   Or $g\left(\vec{u}_i\right) \neq \vec{0}$ car sinon on aurait $f\left(\vec{u}_i\right) = g\left(g(\vec{u}_i)\right) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ ce qui n'est pas possible étant donné que f est injective.

   On en déduit que les $g\left(\vec{u}_i\right)$ sont des vecteurs propres de f.

   (c) Les espaces propres associés aux λ_i sont tous de dimension 1 donc une base de E_{λ_i} est $\vec{u}_i$; ainsi $g\left(\vec{u}_i\right)$ est colinéaire à $\vec{u}_i$, c'est à dire qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g\left(\vec{u}_i\right) = \mu_i \, \vec{u}_i$.

   (d) $f\left(\vec{u}_i\right) = g \circ g\left(\vec{u}_i\right) = g\left(\mu_i \, \vec{u}_i\right) = \mu_i \, g\left(\vec{u}_i\right) = \mu_i^2 \, \vec{u}_i = \lambda_i \, \vec{u}_i$ donc $\mu_i^2 = \lambda_i$ et $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$
3. Un endomorphisme est entièrement défini par la donnée des images des vecteurs d'une base, donc g est déterminé par la donnée des μ_i ; on a deux choix pour chaque indice, soit au total $2^{10} = 1024$ endomorphismes possibles.

   Réciproquement, on vérifie que tous ces endomorphismes commutent avec f, et pour tout i, $g \circ g(\vec{u}_i) = \mu_i^2 \vec{u}_i = f(\vec{u}_i)$ donc $g \circ g$ et f coïncident sur une base, donc $g \circ g = f$.