Correction du devoir n°4

Partie I

1. (a) Supposons φ bijectif, alors φ^{-1} existe et $\varphi^{-1} \circ \varphi^n = \varphi^{-1} \circ 0 = 0$; or $\varphi^{-1} \circ \varphi^n = \varphi^{n-1} \neq 0$ par hypothèse.

   (b) $\varphi^n = 0$, donc $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - \varphi^n = (\mathrm{Id}_E)^n - \varphi^n$ et comme Id_E et φ commutent, on a $\mathrm{Id}_E = (\mathrm{Id}_E)^n - \varphi^n = (\mathrm{Id}_E - \varphi) \circ \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k$ avec la convention $\varphi^0 = \mathrm{Id}_E$.

2. (a) Par hypothèse φ^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul donc il existe un vecteur $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}_E$. On va montrer par récurrence sur n que, sans prendre en compte la dimension de E, que si φ est un endomorphisme nilpotent d'ordre n alors pour tout vecteur $\vec{a}$ pour lequel $\varphi^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$, la famille $\left(\vec{a}, \varphi^2(\vec{a}), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{a})\right)$ est libre. *Cela aura pour conséquence directe que la dimension de E est supérieure ou égale à n.*

   C'est évident pour $n = 0$, en effet $\vec{a}$ n'est pas le vecteur nul donc il constitue une famille libre de 1 vecteur.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que si φ est un endomorphisme nilpotent d'un espace E tel que $\varphi^{n-1} \neq 0$ et $\varphi^n = 0$, alors pour tout vecteur $\vec{a}$ tel que $\varphi^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}_E$, la famille $\left(\vec{a}, \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{a})\right)$ est libre.

   Soit à présent φ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E tel que $\varphi^n \neq 0$ et $\varphi^{n+1} = 0$, et soit $\vec{a}$ un vecteur de E pour lequel $\varphi^n(\vec{a}) \neq \vec{0}_E$.

   Posons $\vec{b} = \varphi(\vec{a})$ et considérons F, le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(\vec{b}, \ldots, \varphi^{n-1}\left(\vec{b}\right)\right)$. La restriction de φ à ce sous-espace est un endomorphisme nilpotent d'ordre n ; en effet $\varphi^{n-1}\left(\vec{b}\right) = \varphi^{n-1}(\varphi(\vec{a})) = \varphi^n(\vec{a}) \neq \vec{0}$ mais $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi^n\left(\varphi^k(\vec{b})\right) = \varphi^{n+1+k}(\vec{a}) = \vec{0}$. D'après l'hypothèse de récurrence, cette famille est libre. On vérifie à présent que $\vec{a} \notin F$ et on pourra en déduire alors que la famille $\left(\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \varphi^{n-1}\left(\vec{b}\right)\right)$ est encore une famille libre : en effet, on constate que $F \subset \mathrm{Im}(\varphi)$, or $\vec{a} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$, car sinon on pourrait écrire $\vec{a} = \varphi(\vec{c})$ avec $\vec{c} \in E$ et on aurait $\varphi^n(\vec{a}) = \varphi^{n+1}(\vec{c}) = \vec{0}$

   On a donc prouvé que si φ est un endomorphisme nilpotent d'ordre n, alors il existe un vecteur $\vec{a}$ pour lequel la famille $\left(\vec{a}, \varphi(\vec{a}), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{a})\right)$ est libre.

   Comme l'espace E est supposé être de dimension n, cette famille est donc une base de E.

   La matrice de φ dans $\mathcal{C}$ a donc une sous-diagonale de 1 et tous ses autres coefficients nuls. φ est de rang $n-1$, ce qui se voit en constatant que les $n-1$ premières colonnes de la matrice sont échelonnées ou en remarquant que la famille $\left(\varphi(\vec{a}), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{a})\right)$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\mathrm{Im}(\varphi)$; $\mathrm{Im}(\varphi)$ est ainsi de dimension $n-1$ au moins et comme φ n'est pas bijective, $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est pas de dimension n.

   (b) La matrice obtenue en inversant l'ordre des vecteurs de base a une sur-diagonale de 1 et tous ses autres coefficients nuls.

Partie II

1. Le calcul donne $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$ et on constate que $u^2(\vec{e}_1) \neq \vec{0}$ donc en prenant comme base $\Big(\vec{e}_1,\, u(\vec{e}_1,),\, u^2(\vec{e}_1)\Big)$ la matrice de u est égale à N.

2. La matrice de passage P, qui vérifie $N = P^{-1} M\, P$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Le noyau de u est de dimension 1, engendré par exemple par $u^2(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.
   L'image de u est de dimension 2, engendrée par $u(\vec{e}_1)$ et $u^2(\vec{e}_1)$.
   On constate que $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\langle (u^2(\vec{e}_1)\rangle$

Partie III

1. Si $P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1)$ aussi et la différence de deux polynômes de même degré est un polynôme de degré inférieur ou égal au degré commun ; donc Δ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$

   On montre à présent la linéarité de Δ ; soient P et Q deux polynômes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $\Delta(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(X+1) - (\lambda P+Q)(X) = \lambda\,(P(X+1)-P(X)) + (P(X+1)-P(X)) = \lambda\,\Delta(P)(X) + \Delta(Q)(X)$

2. (a) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$; $P(X+1)-P(X)$ est le polynôme nul donc en particulier $P(0) = P(1) = \cdots = P(n)$ pour tout entier n. $P - P(0)$ possède tous les entiers relatifs comme racine, il a donc une infinité de racines donc c'est nécessairement le polynôme nul. Ainsi un polynôme est dans le noyau si et seulement si il est constant, donc de degré inférieur ou égal à 0.

   (b) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\Delta\left(X^k\right)$ est de degré $k-1$ donc tout polynôme de E a une image de degré inférieur ou égal à $n-1$; par conséquent, $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

   Le noyau de Δ est de dimension 1 donc son image est de dimension n ; comme elle est incluse dans $R_{n-1}[X]$ qui est de dimension n, on a égalité. Une base de $\mathrm{Im}(\Delta)$ est par exemple la base canonique de $R_{n-1}[X]$.

3. (a) $(X+1)^k$ et X^k ont même coefficient dominant donc celui-ci s'élimine par soustraction, par contre le coefficient de X^{k-1} est non nul donc $(X+1)^k - X^k$ est de degré exactement $k-1$; par conséquent il en va de même pour $P(X+1)-P(X)$, ainsi $\Delta(P)$ est de degré $k-1$lorsque P est de degré k.

   (b) Une récurrence immédiate montre que pour $k \leqslant n$, le degré de $\Delta^k(P)$ vaut $n-k$; ainsi si P est de degré n, $\Delta^n(P)$ est un polynôme constant non nul, donc $\Delta^n(P) \neq 0$; d'autre part pour tout polynôme P de E, donc de degré inférieur ou égal à n, $\Delta^{n+1}(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n-k-1$ donc est le polynôme nul ; finalement :

   $$\boxed{\Delta^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \Delta^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

4. (a) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, N_k est de degré k donc la famille $\mathcal{C}$ est échelonnée en degrés donc libre.

   Son cardinal vaut $n+1$ qui est la dimension de E, c'est donc une base de E.

   (b) $\Delta(N_0) = 0$ puisque N_0, et pour $k>0$, $\Delta(N_k) = N_k(X+1) - N_k(X) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$

   $$\Delta(N_k) = \frac{1}{k!}\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(X-j) \times \underbrace{((X+1)-(X-k+1))}_{k} = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$$

   On a donc $\Delta(N_k) = N_{k-1}$; en conclut que la matrice de Δ a une sur-diagonale de 1 et tous ses autres coefficients nuls.