Devoir maison 4

à rendre pour le vendredi 04 novembre

PARTIE I : étude d'endomorphismes nilpotents en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, où $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$. L'endomorphisme φ est donc nilpotent, d'indice de nilpotence égal à la dimension de E.

1. (a) Montrer par l'absurde que φ n'est pas bijectif.
   (b) Montrer que $id_E - \varphi$ est bijectif et que $(id_E - \varphi)^{-1} = id_E + \varphi + \cdots + \varphi^{n-1}$.
2. Soit $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(\vec{a}) \neq \vec{0_E}$.
   (a) Après avoir justifié l'existence de $\vec{a}$, montrer que la famille
   $$\mathcal{C} = \left(\vec{a}, \varphi(\vec{a}), \ldots, \varphi^{n-1}(\vec{a})\right)$$
   est une base de E.
   (b) Donner la matrice A de φ dans $\mathcal{C}$. En déduire le rang de φ.
   (c) Quelle est la matrice A' de φ dans la base $\mathcal{C}' = \left(\varphi^{n-1}(\vec{a}), \ldots, \varphi(\vec{a}), \vec{a}\right)$?

PARTIE II : un premier exemple

Soit u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déduire de la partie I que M est semblable à
   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Préciser le lien entre ces deux matrices M et N.
3. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de u.

PARTIE III : un second exemple

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, si $P = X^2 + 3$, alors $\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = (X+1)^2 + 3 - (X^2+3) = 2X + 1$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de Δ.
   indication : si $P \in Ker(\Delta)$, montrer que le polynôme $Q = P - P(0)$ a une infinité de racines.
   (b) Vérifier que l'espace image de Δ est inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire une base et la dimension de l'espace image de Δ.
3. (a) Montrer que si P est de degré $k \geq 1$, alors $\Delta(P)$ est de degré $k-1$.
   (b) En déduire que $\Delta^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\Delta^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. On définit les polynômes N_k, pour $0 \leq k \leq n$, par
   $$N_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad N_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j)$$
   (a) Justifier que la famille $\mathcal{C} = (N_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.
   (b) Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\Delta(N_k)$. En déduire la matrice de A de Δ dans $\mathcal{C}$.