Devoir maison 6

à rendre pour le mercredi 30 novembre

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par F_k l'événement « on obtient 'face' au lancer k ». Deux joueurs s'affrontent selon les règles suivantes :

— Le joueur J est gagnant si la configuration 'pile-pile-face' apparaît dans la suite des lancers avant que la configuration 'face-pile-pile' n'apparaisse.

— Le joueur J est gagnant si la configuration 'face-pile-pile-' apparaît dans la suite des lancers avant que la configuration 'face-pile-pile' n'apparaisse.

— Si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par D_n l'événement « lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux 'pile' consécutifs », et on note $d_n = P(D_n)$.

1. Justifier les égalités $d_1 = 1, d_2 = \frac{3}{4}$ puis calculer d_3.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $P_{F_1}(D_{n+2})$ et $P(D_{n+1})$.

   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$
3. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite et la calculer.
4. Bonus : montrer que la série $\sum_{n\geq 1} d_n$ converge et vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

PARTIE II

On note T la v.a.r. désignant le rang du lancer à l'issue duquel un des deux joueurs est déclaré gagnant, et prenant la valeur 0 si aucun des deux joueurs n'est déclaré gagnant.

1. Calculer les probabilités des événements $[T = 1], [T = 2]$ et $[T = 3]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Expliquer ce que signifie l'événement $[T > n] \cup [T = 0]$ et justifier l'égalité
$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Déduire de la question précédente que
$$P(T = n) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$
4. Calculer $P(T = 0)$ et résumer la loi de T.
5. En déduire la probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des joueurs.

PARTIE III

L'objectif est de mettre en évidence informatiquement le paradoxe de Walter Penney (1969). On peut démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la configuration 'pile-pile-face' a la même probabilité d'apparaître que la configuration 'face-pile-pile' au cours des n premiers lancers. Néanmoins (et c'est là le paradoxe), le joueur J' a trois fois plus de chance de remporter la partie que le joueur J. Faire un programme Python qui mette en évidence ce paradoxe. Pour cela :

— faire une fonction `PARTIE()` qui simule une partie et indique le joueur gagnant.

— appeler $N = 100000$ (ou plus) cette fonction et afficher les proportions de parties gagnées par les deux joueurs.

Noter que le programme vient confirmer au passage le résultat de II.5.