CLASSE PRÉPARATOIRE ATS

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I. OBJECTIFS DE FORMATION

1- Mission de la filière et acquis des étudiants

Les classes préparatoires ATS sont destinées aux étudiants titulaires d'un BTS ou d'un DUT désireux de poursuivre leurs études dans une école d'ingénieurs. Depuis plusieurs années, les grandes écoles d'ingénieurs accueillent des étudiants titulaires d'un BTS ou d'un DUT. La plupart d'entre eux ont besoin d'un enseignement de réorientation pour suivre avec profit les études d'ingénieur. C'est à eux que s'adresse la filière ATS.

Pendant leurs années d'étude en section de techniciens supérieurs ou en institut universitaire de technologie, les étudiants ont bénéficié d'une formation mathématique adaptée aux besoins de la spécialité professionnelle choisie. En ce qui concerne les titulaires d'un BTS, de loin les plus nombreux, cette formation mathématique adaptée s'insère dans une organisation de l'enseignement de la discipline valide pour toutes les sections. Les objectifs de formation sont définis comme suit :
- fournir les outils nécessaires pour permettre aux élèves de suivre avec profit d'autres enseignements utilisant des savoir-faire mathématiques ;
- contribuer au développement de la formation scientifique grâce à l'exploitation de toute la richesse de la démarche mathématique : mathématisation d'un problème (modélisation), mise en œuvre d'outils théoriques pour résoudre ce problème, analyse de la pertinence des résultats obtenus ;
- développer des capacités personnelles : acquisition des méthodes de travail, maîtrise des moyens d'expression et des méthodes de représentation, emploi des moyens de documentation.

Le programme des sections de techniciens supérieurs est organisé en modules. Chaque module correspond à un champ mathématique précis et, éventuellement, à un niveau d'approfondissement. On distingue 19 champs, et dans chaque champ est défini un, deux ou trois niveaux d'approfondissement suivant le champ considéré. Le programme de chaque BTS indique les modules à enseigner.
Les étudiants fréquentant la filière ATS provenant de spécialités différentes ont donc suivi en mathématiques des formations différentes. L'heure d'aide au travail personnel prévue par la réglementation en vigueur doit être utilisée pour compléter la formation de certains étudiants provenant de sections dans lesquelles la formation mathématique est plus légère et pour consolider de façon différenciée les acquis de la majorité d'entre eux.

Compte tenu de la répartition des étudiants de la filière, on suppose *a priori*, pour l'organisation de l'enseignement, qu'ils ont suivi les enseignements correspondant aux modules suivants :
- nombres complexes 2 ;
- suites et séries numériques 2 ;
- fonctions d'une variable réelle 2 ;
- calcul différentiel et intégral 2 ;
- équations différentielles 1.

À la liste précédente, on aurait pu ajouter le module « calcul de probabilité 2 », mais ce champ de connaissance ne figure pas dans les programmes des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs.
On peut également remarquer que beaucoup d'étudiants auront suivi les modules suivants :
- analyse spectrale : séries de Fourier ;
- analyse spectrale : transformée de Laplace ;
- fonctions de deux ou trois variables ;
- algèbre linéaire 2 ;
- statistique inférentielle 2
- courbes planes.

On remarque que la formation mathématique des titulaires de BTS est essentiellement tournée vers l'analyse. Dans les classes ATS, une grande attention devra donc être portée à l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Dans la culture de ces étudiants, l'acquisition des concepts mathématiques s'est faite à partir de l'analyse de situations professionnelles. La démarche de la modélisation a été privilégiée. On fait des mathématiques d'abord pour résoudre des problèmes techniques. Comme il n'est pas possible dans les classes de techniciens supérieurs de proposer une théorisation achevée, on met l'accent sur une perception intuitive des concepts et le développement des applications, les résultats importants et difficiles à démontrer étant admis. Il y a dans la démarche décrite précédemment le risque de réduire les mathématiques à un catalogue de recettes que l'on applique sans connaître les tenants et les aboutissants. Les élèves sont souvent tentés d'y succomber.

2- Les objectifs généraux de formation

En mathématiques comme dans les autres disciplines, il est demandé aux étudiants de prendre du recul par rapport à leurs savoirs opérationnels afin de progresser vers une approche plus conceptuelle. C'est cette greffe d'un enseignement plus théorique sur une pratique professionnelle maîtrisée à un certain niveau qui fait l'originalité et la richesse de la filière ATS. Travaux dirigés et exercices en classe ont un rôle important pour l'assimilation du cours. Il ne faut pas oublier que, dans les classes ATS, l'horaire est lourd et que le temps de travail personnel, pourtant indispensable, est limité.

La formation poursuit quatre objectifs :

(i) Initier au raisonnement mathématique, montrer la nécessité d'énoncés clairs et précis, de démonstrations rigoureuses, et faire prendre conscience du rôle joué dans l'élaboration du raisonnement par les idées fondatrices fournies par l'intuition. Le temps disponible étant court, il n'est pas possible sur tous les items du programme de développer la théorie complète. Certains résultats sont admis. On s'efforce d'en faire un commentaire intuitif et de développer les applications afin d'en montrer l'intérêt.

(ii) Montrer l'utilité de la modélisation ; en discerner les limites ; mettre en évidence les hypothèses faites, les concepts utilisés, la puissance des méthodes mises en œuvre ; interpréter et exploiter les résultats.

(iii) Mettre en interaction les différentes parties du programme de la classe, tant à l'intérieur de la discipline mathématique qu'entre les disciplines. Une coopération entre les enseignants de la classe est indispensable pour favoriser en travaux pratiques ou en travaux dirigés l'étude de problèmes nécessitant l'apport de plusieurs disciplines. Dans cette classe, il faut donc tout particulièrement développer l'interdisciplinarité et la coopération des enseignants scientifiques, les mathématiques fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux sciences physiques et aux sciences industrielles. Une coordination entre les progressions des trois disciplines est vivement recommandée.

(iv) L'accent mis sur l'aspect appliqué des mathématiques ne doit pas aboutir à une vue totalement utilitariste de la discipline. Il convient de mettre aussi en valeur la démarche et le contenu culturel propres des mathématiques : montrer la génèse des concepts, leur développement autonome, leur évolution.

3- Architecture et contenu du programme

a) Objectifs du programme

Les contenus sont organisés autour de trois objectifs.

- Réaliser un bon équilibre entre l'algèbre linéaire et l'analyse. L'éclairage géométrique enrichit les concepts développés en analyse et en algèbre linéaire.
- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en écartant celles qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle. C'est dans cet esprit que l'accent a été mis sur la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier, mais qu'a été écartée du programme toute considération générale sur les suites et séries de fonctions.
- Donner un rôle très important aux travaux pratiques. Les thèmes indiqués précisent le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme, ainsi que les méthodes et techniques usuelles exigibles des étudiants. Ces travaux pratiques sont en particulier l'occasion d'utiliser l'outil informatique (logiciel de calcul formel, logiciel graphique, calculatrice programmable).

b) Secteur de l'analyse et de ses interventions

La représentation des fonctions par des séries est au cœur du programme, mais on se limite au cas des séries entières et des séries de Fourier. En revanche, l'étude générale des intégrales dépendant d'un paramètre, et des transformations de Fourier et de Laplace est hors programme. Ces notions peuvent être rencontrées à l'occasion

de l'étude de problèmes, en liaison avec les sciences physiques et industrielles, mais ne font l'objet d'aucune connaissance exigible en mathématiques.
Le calcul différentiel tient aussi une place importante dans le secteur de l'analyse. Il doit être abordé en liaison étroite avec la géométrie, qui lui donne son éclairage et un domaine privilégié d'intervention.

c) Secteur de l'algèbre linéaire et de ses interventions

Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Le programme est organisé autour de la réduction des endomorphismes et des matrices carrées. Pour cela sont développés l'étude des systèmes linéaires, les techniques du calcul matriciel et l'outil que constituent les déterminants.

d) Secteur de la géométrie et de ses interventions

Intégrée à l'analyse et à l'algèbre, la géométrie est présente dans l'ensemble du programme de mathématiques. En relation étroite avec les concepts propres aux sciences physiques et aux sciences industrielles, le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts et des représentations de la géométrie.

4- Intégration de l'outil informatique

a) La démarche algorithmique

L'enseignement dispensé doit valoriser la démarche algorithmique ; le programme intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants. Leur mise en œuvre pratique se fait soit à l'aide du langage de programmation intégré au logiciel de calcul symbolique et formel, soit à l'aide des calculatrices programmables des étudiants.

b) Le calcul symbolique et formel

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques du logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

c) Emploi des calculatrices

Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable, qui permet de mettre en œuvre une partie des algorithmes du programme. Cette utilisation doit être mise en œuvre à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques.

5- Conception et organisation de la formation

a) Organisation du travail de la classe

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit-il, de théories éventuellement suivies d'applications. Il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Il fournit un éclairage nouveau sur des notions déjà vues dans les classes de techniciens supérieurs. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes ; la classe est un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débat sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse

de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualité d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, ...), qualité de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé, ou d'un raisonnement, ...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un dispositif de vision collective approprié.

b) Organisation du travail personnel des étudiants

Les travaux effectués hors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est double ; connaître les concepts et résultats essentiels, qui sont souvent déjà présentés dans le cours des études de techniciens supérieurs (mais uniquement sous une forme empirique, en vue des applications), et maîtriser les méthodes d'étude de problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de manière coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés, en fonction du projet de formation des étudiants. Il convient, à travers ces thèmes d'étude de privilégier l'interdisciplinarité, en partant, aussi souvent que possible, de problèmes réels rencontrés en sciences physiques ou en sciences industrielles.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte, ...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances à mettre en œuvre dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser les exigences mentionnées par le programme. Il faut veiller, surtout en début d'année scolaire, à encourager les étudiants à persévérer, malgré d'inévitables échecs initiaux.

c) Évaluation et notation des étudiants

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre des formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

6- Interprétation et délimitation des programmes

Les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision dans le programme. Compte tenu des acquis mathématiques antérieurs des étudiants, il convient de considérer ce programme comme un bilan des connaissances et des méthodes qui doivent être acquises à l'issue de la classe ATS. Certains points, déjà étudiés et utilisés dans les études antérieures font seulement l'objet de rappels et d'une utilisation au cours des travaux pratiques. Il importe de souligner l'impérieuse nécessité de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui de l'évaluation.
Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Les démonstrations qui sont utiles à une bonne compréhension du cours sont au programme. En

revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis ; ils sont clairement identifiés dans le programme.
Il convient de respecter strictement les indications du programme rappelées ci-dessous :
– Une démonstration ou un savoir-faire non exigible ne peut faire l'objet d'une évaluation.
– Aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution « définition de $\cdots$ » ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

II. PROGRAMME

Le programme de classe préparatoire ATS est organisé en trois parties. Dans une première partie figurent les notions et les objets qui doivent être étudiés dès le début de l'année scolaire. Il s'agit essentiellement, en partant du programme des classes de Terminale STI ou STL et en s'appuyant sur les connaissances préalables des étudiants, en particulier celles acquises dans l'étude des programmes des classes de techniciens supérieurs, de donner les bases mathématiques utiles aux autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles). Ces objets seront considérés comme définitivement acquis et il n'y aura pas lieu de reprendre ensuite leur étude dans le cours de mathématiques.
Les deuxième et troisième parties correspondent à un découpage classique entre l'analyse et ses applications géométriques d'une part, l'algèbre d'autre part.

PROGRAMME DE DÉBUT D'ANNÉE

Ce programme de début d'année est aussi l'occasion pour les étudiants de revoir en situation des connaissances élémentaires, supposées acquises tout au long de leur scolarité, concernant notamment les propriétés des entiers. À cette occasion, on mettra en évidence les différentes formes de raisonnement et en particulier le raisonnement par récurrence

I. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

1- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

Il est souvent commode d'identifier $\mathbf{C}$ *au plan euclidien notamment pour les problèmes d'origine géométrique, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes et, inversement, d'utiliser les nombres complexes pour traiter certaines questions de géométrie plane. En particulier, les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : calcul vectoriel, barycentre, alignement, orthogonalité distance, mesure d'angle.*

a) Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes

Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans $\mathbf{C}$.	La construction du corps $\mathbf{C}$ n'est pas exigible des étudiants. Notations $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$, $\bar{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z+b$.
Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire ; interprétation en termes de distances.	Notation $\lvert z\rvert$; relation $\lvert z\rvert^2 = \bar{z}z$. Interprétation géométrique de $\lvert z\rvert$, de $\lvert z-a\rvert$; disque ouvert (fermé) de centre a.

b) Ensemble des nombres complexes de module 1

Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, relations d'Euler. Propriétés de l'application $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U}$. Formule de Moivre.	Par définition, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ où $\theta \in \mathbf{R}$. La dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition.
Linéarisation et factorisation d'expressions trigonométriques.	Les étudiants doivent connaître les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\tan 2x$. Ils doivent savoir exprimer $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ à l'aide de $\tan\dfrac{\theta}{2}$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.
Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ (forme trigonométrique).	
Racines n-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.	

c) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \quad \text{où} \quad z = x + \mathrm{i}y.$$ Propriétés.	La dérivabilité et les variations de la fonction exponentielle réelle sont supposées connues, ainsi que son équation fonctionnelle.

d) Nombres complexes et géométrie plane

Interprétation des transformations : $$z \mapsto z+b,\ z \mapsto az,\ z \mapsto \frac{1}{z},\ z \mapsto \overline{z}.$$ Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$.	Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité. Aucune connaissance n'est exigible sur les similitudes du plan.

2- Géométrie élémentaire du plan

À l'issue des sections de techniciens supérieurs, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient de faire constater que l'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une structure de plan vectoriel (réel), défini comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Toute théorie générale des espaces vectoriels est exclue à ce stade.
Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles.
La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à $\mathbf{R}^2$ ou à $\mathbf{C}$.

a) Modes de repérage dans le plan

Repère cartésien du plan, coordonnées cartésiennes.	
Repère orthonormal direct, changement de repère.	Les formules de changement de repère sont à connaître, uniquement dans le cas où les deux repères sont orthonormaux directs.
Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormal.	Le repère orthonormal identifie le plan à $\mathbf{C}$.

Repère polaire $(\vec{u},\vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par : $$\vec{u}\,(\theta) = \cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2},$$ $$\vec{v}\,(\theta) = -\sin\theta\ \vec{e_1} + \cos\theta\ \vec{e_2}$$ où $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.	Identification $\vec{u} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\vec{v} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

b) Produit scalaire

Définition géométrique du produit scalaire. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}),$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ sinon.	Interprétation en terme de projection.
Bilinéarité, symétrie, expression en base orthonormale.	
Expression analytique de l'image d'un vecteur par une rotation d'angle θ.	Au moment de l'étude des matrices on donnera la matrice d'une rotation vectorielle.

c) Déterminant

Définition géométrique du déterminant. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls $$\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}),$$ et $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ sinon.	La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe.
Bilinéarité, antisymétrie, expression en base orthonormale directe.	Dans $\mathbf{C}$, interprétation de $\mathrm{Im}\,(\bar{a}b)$ comme déterminant des vecteurs associés à a et b. Interprétation géométrique de $\lvert\det(\vec{u},\vec{v})\rvert$ comme aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Droites

Applications du déterminant à la colinéarité de deux vecteurs, l'alignement de trois points.	
Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal.	
Intersection de deux droites.	
Distance à une droite, équation normale d'une droite.	
Équation polaire d'une droite.	

e) Cercles

Équation cartésienne d'un cercle. Intersection d'un cercle et d'une droite.	Caractérisation d'un cercle de diamètre $[AB]$ par l'équation $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.
Intersection de deux cercles. Équation polaire d'un cercle passant par O.	

3- Géométrie élémentaire de l'espace

À l'issue des sections de techniciens supérieurs, les étudiants connaissent l'espace géométrique euclidien (de dimension 3) en tant qu'ensemble de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient de faire constater que l'ensemble des vecteurs de l'espace est muni d'une structure d'espace vectoriel (réel) de dimension 3, défini comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de trois vecteurs indépendants. Toute théorie générale des espaces vectoriels est exclue à ce stade.

Dans l'espace, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles. On ne soulèvera aucune difficulté théorique sur les notions de vecteur, de base, d'angle ou de norme.
La donnée d'un repère orthonormal identifie l'espace à $\mathbf{R}^3$.

a) Modes de repérage dans l'espace

Coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.

Pour les coordonnées sphériques, on convient de noter θ la colatitude, mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle entre Oz et OM.

b) Produit scalaire

Définition géométrique du produit scalaire. Bilinéarité, symétrie, expression en base orthonormale.

Expression de la distance de deux points dans un repère orthonormal.

c) Produit vectoriel

Définition géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur de norme $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v})$ directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul.
Notations $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$.

La notion d'orientation de l'espace est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Il convient de donner les conventions physiques usuelles.
Interprétation de $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ comme aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Bilinéarité, antisymétrie. Expression dans un repère orthonormal direct. Condition de colinéarité de deux vecteurs.

L'application $\vec{v} \mapsto \vec{u} \times \vec{v}$ est linéaire comme composée de trois applications linéaires (projection, rotation d'angle droit, homothétie).

d) Déterminant ou produit mixte

Définition du produit mixte (ou déterminant) de trois vecteurs :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Trilinéarité, antisymétrie. Expression en repère orthonormal direct. Condition pour que trois vecteurs soient coplanaires.

Interprétation de $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

e) Droites et plans

Paramétrage d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, deux points distincts, deux plans sécants.
Équation d'un plan défini par un point et deux vecteurs indépendants, un point et un vecteur normal, trois points non alignés. Équation normale d'un plan ; distance à un plan.

Intersections de droites et de plans.

Distance d'un point à une droite.

Distance de deux droites ; perpendiculaire commune.

f) Sphères

Équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormal.
Intersection d'une sphère et d'une droite, d'une sphère et d'un plan.

II. FONCTIONS USUELLES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Les propriétés élémentaires liées à la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle sont supposées connues. Les dérivées des fonctions circulaires réciproques seront déterminées en admettant le théorème sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.

1- Fonctions usuelles

Les propriétés des fonctions polynomiales et rationnelles et des fonctions exp, *(sur* **R***)*, ln, cos, sin *sont rappelées sans démonstration.*

a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances. Croissances comparées de ces fonctions.	Les étudiants doivent savoir dériver une fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
Fonctions hyperboliques ch, sh et th.	En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule formule exigible des étudiants est la relation $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique.
Dérivées, variations et représentations graphiques des fonctions hyperboliques.	Les fonctions hyperboliques réciproques ne sont pas exigibles.

b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan. Fonctions circulaires réciproques $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$.	Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires directes et réciproques.

c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ où $a \in \mathbf{C}$; dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs complexes.	La dérivée d'une fonction à valeurs complexes est définie par dérivation des parties réelle et imaginaire.

2- Équations différentielles linéaires

Il convient ici de rappeler la notion de primitive et d'admettre le théorème fondamental la reliant à la notion d'intégrale. Toute théorie générale de l'intégration est exclue à ce stade.

L'objectif, très modeste, est d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre et les équations linéaires du second ordre à coefficients constants.
Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée (échelon unité, créneau, exponentielle réelle ou circulaire) et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscilllation, amortissement, fréquences propres, résonance. Dans le cadre de tels problèmes, on peut être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux) mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Équations linéaires du premier ordre

Équation $y' + a(t)y = b(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation sans second membre associée. Méthode de variation de la constante.	Conséquences de la linéarité de l'équation : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque $b = b_1 + b_2$.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Droite vectorielle des solutions de l'équation sans second membre associée.	Résultat admis.

b) Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation $ay'' + by' + cy = f(t)$, où a, b, c sont des nombres complexes, $a \neq 0$, et f une somme de fonctions de type $t \mapsto e^{\alpha t}P(t)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$. Équation sans second membre associée.	Conséquences de la linéarité de l'équation : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque $f = f_1 + f_2$.
Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Plan vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée.	Résultat admis.

3- Courbes paramétrées. Coniques

On adopte ici le point de vue suivant. Par définition, la fonction vectorielle f tend vers le vecteur l si $\|f - l\|$ tend vers zéro ; cela équivaut au fait que les fonctions coordonnées de f tendent vers les coordonnées de l.

a) Courbes planes paramétrées

Dérivation de $(f\|g)$, $\|f\|$, $\det(f, g)$ lorsque f et g sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.	
Courbe définie par une représentation paramétrique de classe $\mathcal{C}^k$ $$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = f(t).$$ Point régulier, tangente en un point régulier.	La classification des points de rebroussement, l'étude des points d'inflexion sont hors programme.
Cas particulier de la représentation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ où ρ est de classe $\mathcal{C}^k$ et à valeurs réelles. Expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale.	Les seules connaissances spécifiques exigibles des étudiants concernant les courbes définies par une équation polaire sont celles indiquées ci-contre.
Équation polaire d'une droite ne passant pas par O, d'un cercle passant par O.	
Interprétation cinématique : mouvement d'un point mobile, trajectoire, vitesse, accélération.	

b) Coniques

Dans le plan, lignes de niveau de $\dfrac{MF}{MH}$; définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.	Énoncé, sans démonstration, de la caractérisation des ellipses et des hyperboles à l'aide des lignes de niveau de $MF + MF'$ et de $\|MF - MF'\|$ (définition bifocale).
Équation polaire d'une conique dont l'origine est un foyer.	
Détermination, en coordonnées cartésiennes, des tangentes à une conique.	
Image d'un cercle par une affinité orthogonale.	Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des fonctions de une ou plusieurs variables réelles, et de leurs interventions en calcul différentiel et intégral. L'essentiel est que les étudiants sachent mettre en œuvre et utiliser les techniques de base de l'analyse, déjà abordées dans les études antérieures (encadrement, passage à la limite, approximation).
L'accent est mis sur l'expression des fonctions comme somme d'une série entière ou d'une série de Fourier. Il convient de noter toutefois qu'aucune notion générale n'est au programme sur les suites et les séries de fonctions et leurs modes de convergence.

Les problèmes et les méthodes numériques doivent tenir une large place, non seulement en analyse, mais aussi en algèbre et en géométrie, à un double titre :
– *illustration de la portée des résultats et des concepts, et, en retour, motivation pour leur étude ;*
– *recherche et mise en forme d'algorithmes, et comparaison expérimentale de leurs performances.*

Les aspects numériques sont donc étroitement associés aux problèmes mathématiques dont ils relèvent ; en particulier les thèmes d'activités numériques et algorithmiques sont repérés par le signe §.

I. SUITES RÉELLES OU COMPLEXES

L'objectif principal est l'étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée, en relation avec la description de phénomènes discrets.
Pour la notion de limite d'une suite (u_n) réelle ou complexe, on adopte les définitions suivantes :
- Étant donné un nombre réel ou complexe ℓ, on dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a pour limite ℓ si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que la relation $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ soit vraie pour tout $n \geqslant N$. Le nombre ℓ est alors unique et on écrit $\ell = \lim(u)$ ou $\ell = \lim(u_n)$ ou $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou encore $u_n \longrightarrow \ell$. Lorsqu'un tel nombre existe, on dit que la suite (u_n) est convergente.
- On définit de manière analogue, pour une suite réelle, la notion de limite infinie lorsque ℓ est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$.

1- Nombres réels

Il est souvent commode d'identifier la droite euclidienne munie d'une base orthonormale au $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres réels.
La notion de corps totalement ordonné est hors programme.

Corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.	La construction du corps des nombres réels est hors programme.
Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points, valeur absolue d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire $$\big\|\|x\| - \|y\|\big\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$ Interprétation en termes de distances.	Les étudiants doivent savoir utiliser ces inégalités pour majorer ou minorer le module d'une somme.
Définition des intervalles de $\mathbf{R}$.	
Définition d'un majorant, d'un minorant, du plus grand élément et du plus petit élément d'une partie.	
Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} ; approximation par défaut, par excès.	La notion de développement décimal illimité est hors programme.

2- Suites de nombres réels ou complexes

a) Définitions

Définition d'une suite de nombres réels, d'une suite de nombres complexes, opérations sur les suites.

Définition d'une suite bornée.

b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence.

La relation $u_n \to a$ équivaut à $(u_n - a) \to 0$.

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les suites convergentes et leurs limites.

c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite (α_n) de nombres complexes non nuls, définition d'une suite (u_n) de nombres réels négligeable devant (α_n).
Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{\alpha_n} \cdot$

Les notations de Landau ne sont pas exigibles des étudiants.

Définition de l'équivalence de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels ou complexes non nuls. Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{v_n} \cdot$
Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $u_n \sim v_n$.

Si $u_n = v_n + \alpha_n$, où (v_n) est une suite de nombres complexes non nuls et α_n est négligeable devant v_n, alors $u_n \sim v_n$.

d) Suites réelles

Suites monotones, suites majorées, minorées.

Toute suite (u_n) croissante majorée converge ; extension au cas d'une suite croissante non majorée.

La démonstration de ces théorèmes est hors programme.

Suites adjacentes.

e) Comparaison des suites réelles

Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre : si (u_n) et (v_n) sont convergentes avec $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$,	
si $\lvert u_n \rvert \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$,	
si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $v_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$,	
si $v_n \leqslant u_n$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$,	
si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels non nuls telles que $u_n \sim v_n$, alors, à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe.	
Comparaison des suites de références : $n \mapsto a^n,\ n \mapsto n^\alpha,\ n \mapsto (\ln n)^\beta,\ n \mapsto n!$ où $a \in \mathbf{R}_+^*, \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}$.	La notion générale d'échelle de comparaison asymptotique est hors programme.

f) Exemples d'études de suites

Suites arithmétiques, suites géométriques ; calcul de la somme de n termes consécutifs.	
§ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.	On donnera la définition d'un point fixe mais aucun résultat général sur les suites récurrentes n'est au programme.

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Les fonctions étudiées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et à valeurs réelles ou complexes.
Pour la notion de limite d'une fonction f en un point a (appartenant à I ou extrémité de I), on adopte les définitions suivantes :

- Étant donnés des nombres réels a et b, on dit que f admet b pour limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de I, la relation $|x-a| \leqslant \delta$ implique la relation $|f(x)-b| \leqslant \varepsilon$; le nombre b est alors unique, et on le note $\lim_a f$ ou $\lim_{x\to a} f(x)$. Lorsqu'un tel nombre x existe, on dit que f admet une limite finie au point a.

- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque a ou b sont remplacés par $+\infty$ ou $-\infty$.

1- Limites et continuité

a) Propriétés globales

Pour les fonctions à valeurs réelles : - fonctions majorées, minorées ; - définition d'un extrémum, d'un extrémum local ; - composée de deux fonctions ; - fonctions monotones, strictement monotones.	 Notations : $\max_{x\in I} f(x)$ ou $\max_I f$;
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes : - somme, produit de deux fonctions ; - fonctions bornées ; - fonctions paires, impaires ; - fonctions $T-$périodiques.	Notations : $f+g$ et fg ; $\lvert f \rvert$.

b) Étude locale

Limite d'une fonction f en un point a, continuité en un point.	Lorsque $a \in I$, dire que f admet une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point.
Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.	Ces notions sont introduites uniquement en vue des applications à la physique et aux sciences industrielles.
Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	Si $\lvert f(x)\rvert \leqslant \lvert g(x)\rvert$ et $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to 0$. Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $g(x) \to b$ et $h(x) \to b$, alors $f(x) \to b$.
Limite d'une fonction composée.	Les démonstrations sont hors programme.

c) Relations de comparaison locale

Étant donnés un point a (appartenant à I ou extrémité de I) et une fonction φ à valeurs réelles ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$, définition d'une fonction f, à valeurs réelles ou complexes négligeable devant φ au voisinage de a. Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{\varphi}\cdot$	Les notations de Landau ne sont pas exigibles des étudiants ; leur utilisation dans la pratique ne peut être que très progressive.
Définition de l'équivalence au voisinage de a de deux fonctions à valeurs réelles ou complexes ne s'annulant pas sur $I \setminus \{a\}$. Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{g}\cdot$	Notation $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.
Équivalent d'un produit, d'un quotient. Si $f = g + \varphi$, où φ est négligeable devant g, alors $f \sim g$.	
Pour α, β, γ réels, comparaison, lorsque $x \to +\infty$, des fonctions : $$x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x},\ x \mapsto x^{\beta},\ x \mapsto (\ln x)^{\gamma}.$$ Pour α et β réels, comparaison lorsque $x \to 0^+$, des fonctions : $$x \mapsto x^{\alpha} \text{ et } x \mapsto (\lvert \ln x\rvert)^{\beta}.$$	Toute notion générale sur les développements asymptotiques, et en particulier la définition d'une échelle de comparaison sont hors programme.

d) Fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle

Ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles. Composée de deux fonctions continues.	
Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.	La démonstration de ces trois résultats est hors programme, ainsi que la notion de continuité uniforme.

e) Fonctions continues sur un intervalle à valeurs réelles ou complexes

Ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ $\big($resp. $\mathcal{C}(I, \mathbf{C})\big)$ des fonctions continues sur I à valeurs réelles (resp. complexes).	Une fonction f à valeurs complexes est continue si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont continues.
Opérations sur les fonctions continues.	Si f et g sont continues, $f + g$, λf, $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im}\, f$ et $\lvert f\rvert$ sont continues.
Composée de deux fonctions continues.	Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{C})$ et si $g \in \mathcal{C}(J, \mathbf{R})$, où J est un intervalle tel que $g(J)$ est inclus dans I, alors $f \circ g$ est continue.

Prolongement par continuité en une extrémité de J.	
Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$, d'une fonction continue par morceaux.	Extension : une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et $T-$périodique est continue par morceaux si sa restriction à un segment de la forme $[a, a+T]$ est continue par morceaux.

2- Dérivation des fonctions d'une variable réelle

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite.	Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.
Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient.	Notations f', $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ·
Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ $\big($resp. $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{C})\big)$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles (resp. complexes). Dérivée $n-$ième d'un produit (formule de Leibniz).	Notations $f^{(k)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ ·
Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{C})$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbf{R})$, avec $g(J) \subset I$, alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (démonstration non exigible).

b) Étude globale des fonctions dérivables à valeurs réelles

Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.	La notion de difféomorphisme est hors programme.
Extrémums locaux des fonctions dérivables. Égalité des accroissements finis (théorème admis). Inégalité des accroissements finis : si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$	Les étudiants doivent connaître les interprétations graphique et cinématique de ces résultats.
Caractérisation des fonctions constantes et des fonctions monotones parmi les fonctions dérivables. Caractérisation des fonctions strictement monotones parmi les fonctions dérivables dont la dérivée ne s'annule qu'en un nombre fini de points.	
Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$, et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.	Extension au cas d'une limite infinie en a.

c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux : une fonction f définie sur le segment $[a,b]$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.	Par extension, une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et $T-$périodique est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si sa restriction à un intervalle de la forme $[a, a+T]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux définies sur le segment $[a,b]$.	

3- Intégration sur un segment

Le programme est placé dans le cadre des fonctions continues par morceaux. Les théorèmes relatifs à l'étude des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,dt$ *sont hors programme.*

a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment.
Propriétés : linéarité, relation de Chasles. Inégalité :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant |b-a|M.$$

où M est un majorant de $|f|$.

Pour la définition de l'intégrale sur un segment, on peut :
- soit admettre l'existence d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle,
- soit admettre le théorème d'approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

b) Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs réelles

Positivité de l'intégrale ; intégration des inégalités.
Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Propriétés de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes

Relation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \big(\mathrm{Re} f\big)(x)\,dx + \mathrm{i}\int_a^b \big(\mathrm{Im}\, f\big)(x)\,dx.$$

Inégalité de la moyenne : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant |b-a|M$,
où M est un majorant de $|f|$.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\text{si } |f'| \leqslant k, \text{ alors } |f(b)-f(a)| \leqslant k|b-a|.$$

4- Dérivation et intégration

a) Primitives et intégrales d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes

Définition d'une primitive d'une fonction continue.

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Propriété fondamentale :
- étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
- pour toute primitive F de f sur I, si a et b sont deux points de I,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Intégration par parties, changement de variable.

Tableau des primitives déduit des dérivées des fonctions usuelles.

Les étudiants doivent connaître de plus les primitives des fonctions :
$t \mapsto (t-a)^n$, où $a \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$.

b) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algébriques sur les développements limités : somme, produit ; développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, application au quotient.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.

Existence d'un développement limité à l'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

Toute autre formule dite de Taylor est hors programme.

Développement limité d'une primitive, d'une dérivée (démonstrations non exigibles).

Les étudiants doivent connaître les développements limités des fonctions exponentielle, sinus et cosinus, sinus et cosinus hyperboliques ainsi que des fonctions

$$x \mapsto \ln(1+x) \text{ et } x \mapsto (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

5- Intégrales impropres

Pour ce qui concerne les intégrales impropres (ou généralisées), l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle non fermé ou non borné, en vue de la définition de l'intégration sur un intervalle quelconque. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

a) Définition d'une intégrale impropre convergente

Si f est une application continue par morceaux sur $[a,b[$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, par définition, si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b, en restant dans $[a,b[$.

On aura soin de distinguer, dans la présentation, le cas où f est une fonction continue *par morceaux* non bornée sur un intervalle $[a,b[$ borné, et le cas où l'intervalle est non borné (du type $[a,+\infty[$ par exemple).

Définition des intégrales divergentes.

Nature des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha},\ \text{où } \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\int_0^1 \ln t\,dt, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt,\ \text{où } \alpha \in \mathbf{R}_+^*$$

b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et de g, dans le cas où $f \leqslant g$, et dans le cas où $f \sim g$.

c) Intégrales absolument convergentes

On dit que f, continue par morceaux sur I a une intégrale absolument convergente si l'intégrale de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

L'étude de la semi-convergence n'est pas au programme.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Résultat admis.

Comparaison en module à des fonctions réelles positives, du type : $|f| \leqslant g$, ou $|f| \sim g$.

6- Intégration sur un intervalle quelconque

a) Définition

Une fonction f, continue par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment est intégrable sur I si elle admet sur I une intégrale absolument convergente.
Si I est un intervalle quelconque, et f est intégrable sur I, on appelle intégrale de f sur I et on note $\displaystyle\int_I f$
- si I est un segment, l'intégrale de f sur I
- si I n'est pas un segment, son intégrale impropre sur I.

Brève extension des propriétés vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne).

Relation de Chasles : si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point :

$$\int_I f + \int_J f = \int_{I \cup J} f.$$

Changement de variable : étant données une fonction f intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I',

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

La démonstration de ce théorème est non exigible.

7- Calcul d'intégrales

§ Exemples de calcul de primitives et d'intégrales.

Pour les fractions rationnelles, les étudiants doivent savoir calculer une primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles.

Exemples d'étude de la convergence absolue d'intégrales impropres de fonctions continues.

§ Exemples de calculs de valeurs exactes ou approchées d'intégrales.

§ Exemples d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (avec f continue).

III. SÉRIES

On rappelle que l'étude générale des suites et séries de fonctions (autres que séries entières et séries de Fourier) et en particulier les notions de convergence uniforme ou de convergence normale sont hors programme.

1- Séries de nombres réels ou complexes

Comme pour les intégrales impropres, l'objectif est ici l'étude de la convergence absolue des séries à termes réels ou complexes. L'étude de la semi-convergence est limitée aux séries réelles alternées par utilisation de la règle spéciale.

a) Convergence

Séries convergentes, séries divergentes. Convergence des séries géométriques.
Lien entre suite et série : la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

b) Séries à termes réels positifs

Comparaison à une intégrale impropre. Convergence des séries de Riemann.	
Comparaison des convergences de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans le cas où $u_n \leqslant v_n$ et dans le cas où $u_n \sim v_n$.	
Application au cas où l'une des deux séries est une série de Riemann.	La règle « $n^\alpha u_n$ » est hors programme.
Comparaison à une série géométrique ; règle de d'Alembert.	Toute autre règle de convergence, en particulier la règle dite de Cauchy (utilisant $\sqrt[n]{u_n}$) est hors programme.

c) Convergence absolue

Séries absolument convergentes.	
Toute série absolument convergente est convergente.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

d) Séries alternées

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; encadrement de la somme et du reste.	On peut encadrer la somme d'une telle série par deux sommes partielles consécutives. Pour le reste de la série, son premier terme en donne le signe et un majorant en valeur absolue.

e) Opérations

Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire.	La notion de série produit est hors programme.

2- Séries entières

Les séries entières considérées dans ce paragraphe sont à coefficients réels ou complexes.

a) Convergence d'une série entière

Définition des séries entières d'une variable complexe. Étude de la convergence : rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence.	Toute étude systématique de la convergence sur le cercle est exclue.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Intervalle de convergence. Propriétés (admises) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence : continuité, dérivation et intégration terme à terme (avec conservation du rayon de convergence).	On admet de plus que si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, et si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $x = R$ (resp. pour $x = -R$), la somme est continue sur l'intervalle $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$).
Développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $(1+x)^\alpha$, où α est réel.	Seuls ces exemples sont à connaître.

c) Exponentielle complexe

Expression (admise), pour z complexe, de $\exp z$ (ou e^z) comme somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.	On admet la cohérence avec la définition donnée précédemment.

3- Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont présentées dans le cadre des fonctions numériques $T-$périodiques continues par morceaux (T est un nombre réel strictement positif, et on pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$).

a) Définitions

Coefficients de Fourier d'une fonction $T-$périodique f définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et continue par morceaux (expression en cosinus et sinus, en posant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$), sommes partielles

$$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)\big)$$

de la série de Fourier d'une telle fonction.

Dans certains cas, on peut simplifier les calculs en définissant pour $n \in \mathbf{N}, n > 0$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) - \mathrm{i}b_n(f)\big)$$

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\big(a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f)\big),$$

$$\text{et } c_0(f) = a_0(f),$$

mais aucune formule relative à la forme exponentielle des coefficients de Fourier n'est exigible.

b) Formule de Parseval

Théorème de Parseval (admis) : convergence et expression

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

c) Convergence d'une série de Fourier

Théorème de Dirichlet (admis) : pour une fonction $T-$périodique f définie sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Fourier $S_n(f)(t)$ convergent en tout t réel, vers $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$, demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point t.

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, lorsque n tend vers l'infini, les sommes de Fourier $S_n(f)(t)$ convergent en tout t réel, vers $f(t)$.

Dans ces hypothèses, on admet que pour tous α et β réels, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de f.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est de compléter l'étude entamée dans le programme de début d'année (section II.2). Cette étude doit être accompagnée d'interprétations géométriques et de représentations graphiques.

1- Équations différentielles linéaires

a) Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition d'une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille n. Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée (la démonstration de ce résultat est hors programme).

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n. On donnera la forme des solutions dans le cas où la matrice A est diagonalisable (et seulement dans ce cas).

§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = A\,X$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire).

b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.	Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.
Équation $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où a, b, c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.	
Lorsque a ne s'annule pas sur I, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.
Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène. Expression des solutions de l'équation complète dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.	

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires d'ordre 1

En dehors du cas des équations à variables séparables, tout exercice d'intégration d'une équation différentielle non linéaire devra comporter l'indication d'une méthode.

Équations différentielles à variables séparables ; cas particulier des équations incomplètes.	On illustrera la notion de courbe intégrale.
§ Algorithme de recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ou d'un système autonome de deux équations d'ordre 1 par la méthode d'Euler.	
§ Exemples de construction de courbes intégrales d'une équation différentielle.	On se limitera à des exemples simples, principalement issus de la physique ou des sciences industrielles.

V. FONCTIONS DE $\mathbf{R}^n$ DANS $\mathbf{R}^p$

Les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, ces espaces étant munis de leur structure euclidienne canonique. On se limitera aux cas où $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$.
Les étudiants doivent connaître, dans un espace euclidien, les définitions de la norme euclidienne et de la distance associée, des boules, des parties bornées, des ouverts et des fermés ainsi que de la convergence d'une suite.
On ne soulèvera aucune difficulté liée aux ensembles de définition des fonctions considérées.

1- Espace $\mathbf{R}^n$, fonctions continues

a) Espace vectoriel normé $\mathbf{R}^n$

Norme et distance euclidiennes. Définitions des boules, des parties ouvertes, des parties fermées, des parties bornées.

b) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Espace vectoriel des fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. Fonctions bornées.
Limite et continuité ; caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées. Opérations algébriques sur les limites.

c) Fonctions continues de n variables réelles à valeurs réelles

Fonctions définies sur une partie A de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs réelles, opérations. Fonctions bornées sur une partie A.	
Limite et continuité en un point.	La notion de continuité partielle est hors programme.

Espace vectoriel des fonctions continues sur A	Produit de fonctions continues.
Toute fonction continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes (théorème admis).	

d) Extension aux fonctions de n variables réelles à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Caractérisation de la limite, de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées.	Démonstration hors programme.
La composée de deux applications continues est continue.	

2- Calcul différentiel

L'objectif est d'aboutir à une bonne maîtrise de quelques problèmes usuels à partir d'un minimum d'outils théoriques. En particulier la notion d'application différentiable est hors programme et les applications de classe $\mathcal{C}^1$ sont définies à partir des dérivées partielles.
Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. Rappelons que n et p sont des entiers $\leqslant 3$.

a) Dérivées partielles des fonctions de n variables réelles à valeurs réelles

Dérivée de f définie sur un ouvert U suivant un vecteur en un point. Dérivées partielles premières. Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; différentielle en un point. Gradient.	
Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.	Produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Dérivée d'une fonction composée de l'un des deux types suivants : $x \mapsto f(u(x), v(x))$, $(x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y))$.	On utilisera la notation différentielle : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy$ (pour deux variables par exemple) très commode pour le calcul de la différentielle d'une fonction composée.
Calcul, sur des exemples, du gradient en coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.	
Vecteurs directeurs de la tangente et de la normale en un point d'une ligne de niveau $F(x, y) = \lambda$. Normale en un point d'une surface $F(x, y, z) = 0$.	
Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz (admis).	
Espace vectoriel $\mathcal{C}^2(U, \mathbf{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.	Produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, formule (admise) de Taylor-Young d'ordre 2.	
Condition nécessaire d'existence d'un extrémum local pour une fonction de $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, étude de l'existence d'un extrémum local en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$ (démonstration non exigible).	On donnera l'interprétation géométrique de cette étude.
Exemples de recherche d'extrémums locaux ou globaux.	

b) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Dérivées successives d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^p$; caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées. Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^p)$. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point ; caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.	

Dérivées k−ième du produit d'une fonction d'une variable à valeurs dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ par une fonction d'une variable à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Produit scalaire, produit vectoriel de deux fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R}^p)$, expression des dérivées ($p = 2$ ou 3).	

c) Fonctions de n variables réelles à valeurs dans $\mathbf{R}^p$

Dérivées partielles premières, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées.	
Différentielle en un point, matrice jacobienne, jacobien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Matrice jacobienne d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.	

3- Calcul intégral

Les notions introduites dans ce paragraphe sont étudiées en vue de leur utilisation en sciences physiques ou en sciences industrielles. Le programme se limite au cas des fonctions continues sur une partie fermée bornée. Aucune connaissance n'est exigible sur la définition et la construction de l'intégrale. Tous les résultats sont admis.

a) Intégrales doubles

Intégrale double sur une partie bornée définie par des conditions simples.	
Calcul par intégrations successives ou par passage en coordonnées polaires.	Les étudiants n'ont pas à connaître d'autres changements de variables.
Linéarité, croissance, additivité par rapport aux ensembles.	

b) Extension aux intégrales triples

Calcul par intégrations successives ou par passage en coordonnées cylindriques ou sphériques.	

VI. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce chapitre.

1- Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs selon les cas dans $\mathbf{R}$, dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ ou l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, et de classe $\mathcal{C}^k$, où $1 \leqslant k \leqslant \infty$.

Longueur d'un arc régulier, abscisse curviligne. Représentation normale d'un arc.	On ne soulèvera aucune difficulté théorique.
Si f est de classe C^k sur I, où $2 \leqslant k \leqslant \infty$, et $t \mapsto M = f(t)$ définit un arc régulier, il existe une fonction α de classe C^{k-1} sur I telle que, pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{T} = \vec{u}\big(\alpha(t)\big)$ où $\big(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$ désigne le repère polaire. Relations : $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{N} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Définition du repère de Frenet.

Définition de la courbure par $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$, du rayon de courbure ; caractérisation des points biréguliers.

Relations de Frenet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}, \quad \dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T}.$

Les étudiants doivent connaître l'expression de la courbure en un point régulier $M = f(t)$:

$$\gamma = \frac{\mathrm{Det}\,(f', f'')}{\|f'\|^3},$$

et savoir en déduire les expressions de la courbure en fonction des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées polaires.

Rayon de courbure, centre de courbure, cercle de courbure (ou osculateur).
Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet.

La définition d'une développée est hors programme.

2- Surfaces

a) Surfaces paramétrées, plan tangent

Surfaces paramétrées (ou nappes paramétrées) de classe $\mathcal{C}^2$.
Point régulier, plan tangent, normale.

b) Modes de définition d'une surface

Surface définie par une représentation paramétrique

$$(u, v) \longmapsto \overrightarrow{OM} = f(u, v),$$

où f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Cas particuliers des surfaces Σ définies par une paramétrisation cartésienne :
une des coordonnées est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ des deux autres.

Surface définie par une équation $F(x, y, z) = 0$, où F est une application de classe $\mathcal{C}^2$, d'un ouvert U de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$.

Plan tangent en un point où le gradient est non nul.
Vecteurs directeurs de la normale en un point d'une ligne de niveau $F(x, y, z) = \lambda$.

On fera la liaison avec le cas d'une paramétrisation cartésienne, où :

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre linéaire et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. L'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie est le thème d'étude essentiel. La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel contitue un objectif majeur.
Le but du cours d'algèbre linéaire est la mise en place de l'outil fondamental que constitue la réduction des endomorphismes et des matrices. Cela nécessite la maîtrise des outils et des techniques de base (calcul matriciel, déterminants, résolution des systèmes linéaires). Dans cette optique, le calcul matriciel, ou le calcul des déterminants n'est pas une fin en soi, et on évitera sur ces points tout excès de technicité.

On donnera les définitions de groupe et de corps (commutatif) ; aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur ces notions.

Pour le corps de base, noté $\mathbf{K}$*, on se limite à* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

I. STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Cette partie sert uniquement à mettre en place le cadre de l'algèbre linéaire.

1- Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, définition d'un sous-espace vectoriel, intersection de sous-espaces vectoriels.	On rappelle que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Définition d'une application linéaire. Composée de deux applications linéaires. Définition d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme.	
Noyau et image d'une application linéaire. Application réciproque d'une application linéaire bijective.	Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.
Définition d'une combinaison linéaire de p vecteurs d'un espace vectoriel. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	

2- Fonctions polynomiales et rationnelles

L'objectif est de disposer des notions de polynôme et de fraction rationnelle (considérés comme fonction polynomiale et fonction rationnelle), à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$ *(*$\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*), des opérations sur les polynômes, et des résultats relatifs à la factorisation pour leur utilisation dans la réduction des endomorphismes.*

a) Polynômes

Définition d'un polynôme comme fonction polynomiale de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$. Degré d'un polynôme. Opérations sur les polynômes.	Le cas où la variable est complexe est présenté comme une extension naturelle du cas réel : aucune difficulté théorique ne sera soulevée à ce propos.

b) Racines d'un polynôme

Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Définition d'un polynôme irréductible.	
Théorème de d'Alembert-Gauss (admis). Écriture d'un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ comme produit de polynômes du premier degré, d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ comme produit de polynômes de degré un ou deux.	Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$. Somme et produit des racines d'un polynôme à coefficients complexes. Division euclidienne de deux polynômes.

c) Fonctions rationnelles

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la partie polaire est hors programme.
Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle simple, mais aucune connaissance n'est exigible dans le cas de pôles d'ordre supérieur.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.
Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples.

Aucune connaissance spécifique sur l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ n'est exigible des étudiants.

Exemples de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à coefficients réels sur $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$, lorsque les pôles complexes sont d'ordre 1 ou 2.

Pour les pôles d'ordre 2, une méthode doit être fournie.

II. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

L'étude des espaces vectoriels de dimension finie, et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel. La théorie de la dualité est hors programme.

1- Espaces vectoriels et applications linéaires

a) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$. Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et une famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_i) = f_i$.

La donnée de p vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans E, définie par :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \lambda_k x_k;$$

noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Théorème de la base incomplète (admis), existence de bases.

Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

On convient que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension nulle.

Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si $\mathcal{F}$ est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base ;
- si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E, est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$.

Définition des sous-espaces vectoriels supplémentaires, notation $E = F \oplus G$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F).$$

Pour toute application linéaire u de E dans F,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

La démonstration de cette relation est hors programme.

2- Calcul matriciel

Le calcul matriciel présente deux aspects qu'il convient de mettre en valeur :
- Calcul sur des tableaux de nombres, interprétés en termes d'applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ munis de leurs bases canoniques.
- Expression dans des bases d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.
Un des objectifs essentiels est d'interpréter matriciellement un changement de base dans un espace vectoriel, puis d'étudier l'effet d'un changement de base(s) sur la matrice associée à un endomorphisme (à une application linéaire). La notion de matrices carrées équivalentes est hors programme.

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{K}$. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définition du produit matriciel.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$. Écriture matricielle $Y = MX$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes. Produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ conserve le produit. Matrices carrées inversibles.

Matrices diagonales, matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Définition d'une matrice carrée symétrique.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs.

Matrice $M_{e,f}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base $e = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ dans un espace vectoriel F muni d'une base $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.
L'application $u \mapsto M_{e,f}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
Cas où $E = F$ et $e = f$.

La $j-$ième colonne de $M_{e,f}(u)$ est, par définition, le vecteur colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base f :

$$u(e_j) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} m_{i,j} f_i.$$

Matrice de passage d'une base e à une base e' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme.

Par définition la matrice de passage P de la base e à la base e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Si son coefficient général est $p_{i,j}$, on a donc :

$$e'_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{i,j} e_i.$$

Notons que $P = M_{e',e}(I_E)$.

Matrices carrées semblables : définition, interprétation en termes de changement de base.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice. Interprétation en termes de multiplication à droite (ou à gauche) par une matrice inversible.

Opérations élémentaires sur les lignes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

3- Équations et systèmes d'équations linéaires

a) Solutions d'une équation linéaire

Équation linéaire $u(x) = b$, avec u application linéaire de E vers F de dimensions quelconques.
Cas de l'équation homogène.
Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$. Étude du cas où $b = b_1 + b_2$.

Pour l'équation homogène, l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel $\operatorname{Ker} u$.
Dans le cas général, il est vide si $b \notin \operatorname{Im} u$, et de la forme $x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + x \mid x \in \operatorname{Ker} u\}$ si $b \in \operatorname{Im} u$.

b) Systèmes d'équations linéaires

Définition, interprétations. Description de l'ensemble des solutions. Système homogène associé.

Dimension r de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.
Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires.

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

Emploi de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et pour l'inversion des matrices carrées.

III. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Dans ce chapitre, le corps des scalaires, noté $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Valeurs propres et vecteurs propres

Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres (en dimension finie ou non).
Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

On convient qu'un vecteur propre est non nul.
Éléments propres d'une homothétie, d'une projection, d'une symétrie.

2- Déterminants

a) Déterminant de n vecteurs dans une base

Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.

Aucune démonstration concernant les déterminants n'est exigible des étudiants. Les propriétés usuelles sont admises.

Échange de deux vecteurs.

b) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice (admis). Développement par rapport à une ligne ou à une colonne. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.	Le groupe symétrique n'étant pas au programme, l'expression du déterminant d'une matrice en fonction de ses coefficients n'est pas non plus au programme. Le déterminant d'une matrice carrée est par définition le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.	Ce résultat peut être admis.

3- Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre : il est minoré par la dimension du sous-espace propre associé.	
Endomorphismes diagonalisables (par définition $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u). Caractérisation (admise) à l'aide des dimensions des sous-espaces propres. En dimension n, tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique a n racines (distinctes) est diagonalisable.	Quand l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de diagonalisation par réunion de bases de chacun des sous-espaces propres.

4- Réduction des matrices carrées

Valeurs propres d'une matrice carrée, polynôme caractéristique, vecteurs propres, sous-espaces propres.	
Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées : toute matrice carrée dont le polynôme caractéristique peut s'écrire comme produit de polynômes de degré un est semblable à une matrice triangulaire supérieure (admis).	Les étudiants n'ont pas à connaître de méthode générale de trigonalisation.
§ Exemples d'étude du comportement des puissances n-ièmes d'une matrice.	

IV. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Dans ce chapitre, le corps des scalaires est $\mathbf{R}$ *et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.*

1- Produit scalaire et norme euclidiens

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme. Théorème de Pythagore.	
Définition d'une base orthonormale. Définition d'une base orthonormale ; existence de bases orthonormales dans un espace euclidien.	
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel ; distance à un tel sous-espace.	

2- Groupe orthogonal

Définitions d'un automorphisme orthogonal, du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Matrices orthogonales, groupe $\mathcal{O}(n)$.	On décrira le groupe orthogonal en dimensions 2 et 3 (et seulement dans ces cas).

3- Endomorphismes symétriques

Définition d'un endomorphisme symétrique ; matrice associée dans une base orthonormale.	
Théorème admis de réduction d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale.	Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

4- Formes quadratiques

Définitions d'une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$, d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ et de la forme polaire associée.	Sont hors programme toute notion générale sur les formes bilinéaires, et les notions de rang et de signature d'une forme quadratique.
Matrice d'une forme bilinéaire symétrique (resp. d'une forme quadratique) dans une base orthonormale.	On reliera l'étude des formes quadratiques à celle de la matrice de l'opérateur d'inertie d'un solide, qui figure au programme de mécanique.
Réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale.	La réduction d'une forme quadratique dans une base non orthonormale est hors programme.