Équations différentielles linéaires du premier ordre

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Septembre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre, les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ ouverts et non vides et pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants, l'intervalle est le plus souvent $\mathbb{R}$.

1 Généralités sur les équations différentielles

1.1 Définitions

Définition 1.1.1
On appelle équation différentielle d'ordre n*, une équation où l'inconnue est une fonction et où figurent la dérivée d'ordre* n *de cette fonction et éventuellement les dérivées d'ordres inférieurs à* n*, la fonction elle-même et la variable.*

Exemples

1. $y' = y$ est une équation différentielle du premier ordre.
2. $y'' - 4y' + 3y = 9t$ est une équation différentielle du second ordre.

Définition 1.1.2
On appelle solution *d'une équation différentielle sur un intervalle* I*, toute fonction (dérivable à l'ordre* n *sur* I*) qui vérifie l'équation sur l'intervalle* I.
Résoudre *ou* intégrer *une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions.*

✏ Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y$?

✏ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3t+4$ est une *solution particulière* de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 9t$.

En général toutes les solutions d'une équation différentielle peuvent s'écrire sous une même forme, cette écriture (qui dépend d'une ou plusieurs constantes) est appelée *solution générale* de l'équation différentielle.

1.2 Rappels de terminale

Théorème 1.2.1
La solution générale de l'équation différentielle $y' = ky$ *où* k *est une constante réelle (ou complexe) est la fonction* y *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $y(t) = Ae^{kt}$*,* A *étant une constante réelle (ou complexe).*

Théorème 1.2.2
La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ *où* ω *est une constante réelle non nulle est la fonction* y *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$*,* A *et* B *étant deux constantes réelles.*
Cette solution générale peut aussi s'écrire $y(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi)$ *ou* $y(t) = A_2\sin(\omega t + \theta)$*,* A_1*,* A_2*,* φ *et* θ *étant des constantes réelles.*

✏ Résoudre $y'' + 9y = 0$.

2 Généralités sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définition

Définition 2.1.1
Une équation différentielle linéaire *du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme* $ay' + by = c$ *où* a*,* b *et* c *sont trois fonctions continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *(*a *n'étant pas la fonction nulle sur l'intervalle* I*).*
La fonction c *est appelé le* second membre *de l'équation différentielle.*

2.2 Équation sans second membre

Définition 2.2.1
On appelle équation différentielle sans second membre associée *à l'équation (complète)* $ay' + by = c$*, l'équation* $ay' + by = 0$*. On dit aussi qu'il s'agit de* l'équation homogène associée.

2.3 Propriétés des solutions d'une équation sans second membre

Théorème 2.3.1
Soient $a \neq 0$ *et* b *deux fonctions continues sur un intervalle* I *à valeurs réelles ou complexes.*

1. *Si* f_1 *et* f_2 *sont deux solutions de l'équation différentielle* $ay' + by = 0$*, alors* $f_1 + f_2$ *est solution de l'équation* $ay' + by = 0$ *;*
2. *Si* f *est une solution de l'équation différentielle* $ay' + by = 0$*, et si* k *est une constante réelle ou complexe, alors* kf *est solution de l'équation* $ay' + by = 0$*.*

Ces deux propriétés justifient le nom d'équations différentielles linéaires *donné à ces équations.*

✏ Démontrer le théorème 2.3.1.

3 Résolution de l'équation sans second membre

3.1 Théorème fondamental

Théorème 3.1.1
Si a *et* b *sont des fonctions continues sur un intervalle* I*, si* $a(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in I$*, alors les solutions de l'équation* $ay' + by = 0$ *sur* I *sont les fonctions* y *définies sur* I *par :*

$$y(t) = Ke^{-G(t)}$$

K *étant une constante et* G *une primitive de* $t \longmapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$ *sur* I*.*

☛ Comme $a(t) \neq 0$ sur I, l'équation $ay' + by = 0$ s'écrit $y' + \dfrac{b}{a}y = 0$, c'est-à-dire, quel que soit $t \in I$, $y'(t) + G'(t)y(t) = 0$.

On multiplie les deux membres de l'égalité par $e^{G(t)}$ (qui n'est jamais nul sur I) et on obtient :

$y'(t)e^{G(t)} + y(t)G'(t)e^{G(t)} = 0$, c'est-à-dire $\left(y(t)e^{G(t)}\right)' = 0$ donc $y(t)e^{G(t)} = K$ et finalement :

$$\boxed{y(t) = Ke^{-G(t)}, \text{ K étant une constante}}.$$

✏ Résoudre $ty' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

3.2 Équation du premier ordre à coefficients constants, sans second membre

✏ Résoudre $ay' + by = 0$ où $a \neq 0$ et b sont des nombres réels ou complexes.

Définition 3.2.1
On appelle équation caractéristique *de l'équation différentielle* $ay' + by = 0$*,* $a \neq 0$ *et* b *étant deux constantes réelles ou complexes l'équation* $ar + b = 0$ *d'inconnue réelle ou complexe* r*.*

Théorème 3.2.1
La solution générale de l'équation différentielle $ay' + by = 0$*,* $a \neq 0$ *et* b *étant deux constantes réelles ou complexes est la fonction* y *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $y(t) = Ae^{r_0 t}$ *où* A *est une constante réelle ou complexe et* r_0 *la solution de l'équation caractéristique* $ar + b = 0$*.*

✏ Résoudre $2y' - 3y = 0$ en utilisant le théorème 3.2.1.

4 Résolution de l'équation avec second membre

4.1 Méthode générale de résolution

Théorème 4.1.1
La solution générale de l'équation $ay' + by = c$ *où* $a \neq 0$, b *et* c *sont trois fonctions continues sur un intervalle* I *est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation homogène associée.*

✏ Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{2t}$ est une solution particulière de l'équation $2y' - y = 3e^{2t}$. En déduire la solution générale de cette équation différentielle.

4.2 Cas particulier des équations à coefficients constants avec second membre

Pour le paragraphe 4.2, $a \neq 0$ *et* b *désignent deux nombres réels ou complexes.*

4.2.1 Résolution lorsque c est une fonction polynôme

Théorème 4.2.1
Une solution particulière de $ay' + by = c(t)$ *où* c *est une fonction polynôme de degré* n *est de la forme* $y(t) = P(t)$ *où* P *est une fonction polynôme de degré* n.

✏ Résoudre $y' - 2y = -4t$.

4.2.2 Résolution lorsque $c(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Théorème 4.2.2
Une solution particulière de $ay' + by = c(t)$ *avec* $c(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, A, B *et* $\omega \neq 0$ *étant des constantes (*A *et* B *n'étant pas simultanément nuls) est de la forme* $y(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$, α *et* β *étant des constantes.*

✏ Résoudre $y' - 2y = 13\sin 3t$.

4.2.3 Résolution lorsque $c(t) = f(t)e^{kt}$, f étant une fonction polynôme

Théorème 4.2.3
Une solution particulière de $ay' + by = f(t)e^{kt}$ *où* f *est une fonction polynôme de degré* n *et* k *une constante, est de la forme :*

1. $y(t) = P(t)e^{kt}$, P *étant une fonction polynôme de degré* n, *si* k *n'est pas solution de l'équation caractéristique* $ar + b = 0$;
2. $y(t) = tP(t)e^{kt}$, P *étant une fonction polynôme de degré* n, *si* k *est solution de l'équation caractéristique* $ar + b = 0$.

☛ *En général, dans ce cas, la forme de la solution particulière est indiquée dans l'énoncé de l'exercice.*

✏ Résoudre les équations différentielles $y' + 2y = te^{t}$ et $y' + 2y = te^{-2t}$.

Théorème 4.2.4
Une solution particulière de $ay' + by = f(t)e^{kt}$ *où* $f(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, A, B *et* $\omega \neq 0$ *étant des constantes (*A *et* B *n'étant pas simultanément nuls), est de la forme* $y(t) = (\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)e^{kt}$ *(*α *et* β *étant deux constantes).*

☛ *En général, dans ce cas, la forme de la solution particulière est indiquée dans l'énoncé de l'exercice.*

✏ Résoudre l'équation différentielle $y' - y = e^{t}\cos t$.

4.3 Résolution de $ay' + by = c$ (méthode de la variation de la constante)

Soient $a \neq 0$, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I. On veut résoudre l'équation :

$$ay' + by = c \tag{1}$$

Méthode

- On cherche la solution générale de l'équation sans second membre :

$$ay' + by = 0 \tag{2}$$

  en utilisant les théorèmes 3.1.1 et 3.2.1.
- Si $t \longmapsto C\varphi(t)$ (où C est une constante arbitraire) est la solution générale de l'équation sans second membre (équation 2), on cherche une fonction z, dérivable sur I, telle que $t \longmapsto z(t)\varphi(t)$ soit une solution de l'équation complète (équation 1) (on pose donc $y(t) = z(t)\varphi(t)$, la *constante* C devient une *fonction* z).
- On obtient alors une équation de la forme $z'(t) = d(t)$ où d est une fonction continue sur l'intervalle I.
  On a donc $z(t) = D(t) + K$ où D est une primitive de d sur l'intervalle I et K une constante.
- Finalement $y(t) = z(t)\varphi(t) = D(t)\varphi(t) + K\varphi(t)$.

☞ Résoudre l'équation $ty' + y = t^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

4.4 Solution de $ay' + by = c$ vérifiant une condition initiale

Théorème 4.4.1 (condition initiale)
Soient $a \neq 0$, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I. Il existe une seule fonction y définie sur I solution de l'équation $ay' + by = c$ telle que $y(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$. La condition $y(x_0) = y_0$ est une condition initiale*.*

✏ Déterminer la solution f, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation $y' - y = e^t \cos t$ qui vérifie $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

✏ Déterminer la solution g, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, de l'équation $ty' + y = t^2$ qui vérifie $g(1) = 2$.