Intégrales impropres

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Novembre 2010

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Définition et exemples

1.1 Définition

Définition 1.1.1
Si f *est une fonction continue sur* $[a\ ;\ +\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*) et si* $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = A \in \mathbb{R}$*, on dit que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge *et on pose* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = A$.

Dans les autres cas, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

1.2 Exemples

✏ Convergence de $I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ (avec $a > 0$).

✏ Convergence de $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{3}{t^2+4}\,dt$ (on posera $t = 2u$).

Réponses : I_1 diverge et I_2 converge vers $\frac{3\pi}{8}$.

Remarques :

– On définit de même la convergence de $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$.

– Si $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

2 Intégrales de RIEMANN

2.1 Définition

Définition 2.1.1
Si α *est un nombre réel, pour tout nombre réel* $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *est une intégrale de* RIEMANN[1].

2.2 Étude de la convergence

On a vu que si $\alpha = 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

✏ On considère $a > 0$ et $\alpha \neq 1$, calculer $F(x) = \int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

Étudier ensuite $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ suivant les valeurs de α.

Théorème 2.2.1
Si a *est un nombre réel strictement positif et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors :*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1,$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \text{ diverge si et seulement si } \alpha \leqslant 1.$$

1. Bernhard RIEMANN, mathématicien allemand (1826-1866) dont les travaux ont porté notamment sur le calcul intégral et les fonctions de variables complexes et ont eu une influence considérable.

3 Cas des fonctions positives – intégrales absolument convergentes

3.1 Théorèmes

Théorème 3.1.1
Soient f *et* g *deux fonctions continues et* positives *sur* $[a\,;\,+\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*) telles que* $f \leqslant g$.

- *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*
- *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *diverge.*

Théorème 3.1.2
Si f *et* g *sont deux fonctions continues et* positives *sur* $[a\,;\,+\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*) telles que* $f \sim g$ *au voisinage de* $+\infty$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *sont de même nature (elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux).*

3.2 Exemples

✏ Retrouver la nature de $I_2 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{t^2+4}\,dt$.

✏ Étudier la convergence de $I_3 = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt$.

Réponses : I_2 converge et I_3 diverge.

3.3 Intégrales absolument convergentes

Théorème 3.3.1
Soit f *une fonction continue sur* $[a\,;\,+\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*).*
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*

Définition 3.3.1
Soit f *une fonction continue sur* $[a\,;\,+\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*).*
Lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *converge, on dit que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *est* absolument convergente.

Théorème 3.3.2 (corollaire du théorème 3.3.1)
Toute intégrale absolument convergente est convergente.

✏ Étudier la nature de $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,dt$.

Réponse : I_4 converge.

4 Exercices

Pour les exercices 1 à 3, étudier la convergence des intégrales données.

EXERCICE 1

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2}\,dt.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{(t+1)^2}\,dt.$

EXERCICE 2

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,dt.$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2-1}\,dt.$

EXERCICE 3

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{(t-1)^3}\,dt.$

EXERCICE 4

p désignant un nombre réel strictement positif, étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} (\sin 3t)e^{-pt}\,dt.$$

Donner la valeur exacte de I_1 et de I_2.

EXERCICE 5

p désignant un nombre réel positif, étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-(2+3p)t}\,dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} (\cos 3t)e^{-(2+3p)t}\,dt.$$