Courbes définies paramétriquement

Section de techniciens supérieurs
Informatique et réseaux pour l'industrie et les services techniques
Lycée Charles PONCET

Janvier 2011

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère (en général orthonormal) $\mathscr{R} = (O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ *ou* $\mathscr{R} = (O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ *lorsque les nombres complexes sont utilisés.*

1 Généralités

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1.1
Si f *et* g *sont deux fonctions numériques définies sur* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$*, l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x\ ;\ y)$ *avec* $x = f(t)$ *et* $y = g(t)$ *est une* courbe définie paramétriquement.

✏ Démontrer que la courbe définie par $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, est une droite (chercher une équation cartésienne de cette droite en éliminant t).

✏ On considère a et b deux nombres réels et R un nombre réel strictement positif.
Démontrer que la courbe définie par $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

1.2 Remarques

À l'aide des fonctions f et g on peut définir une fonction F sur $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} F\ :\ \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (f(t)\ ;\ g(t)) \end{aligned}$$

f et g sont alors les *fonctions coordonnées* de F.
La courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique $x = f(t)$ et $y = g(t)$ représente alors F dans le plan muni du repère $\mathscr{R}$.
Ces notions se généralisent à l'espace en utilisant trois fonctions coordonnées.

On peut également définir une fonction Φ sur $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \Phi\ :\ \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t) + ig(t) \end{aligned}$$

La courbe $\mathscr{C}$ représente alors Φ dans le plan complexe muni du repère $\mathscr{R}$. Cette courbe est l'ensemble des points M d'affixe $z = f(t) + ig(t)$ quand t décrit $\mathscr{D}$.

Lorsque t représente le temps, $\mathscr{C}$ est alors la *trajectoire* du point M.

1.3 Vecteur dérivé et tangente

Définition 1.3.1
Soit $F = (f\ ;\ g)$ *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *de fonctions coordonnées* f *et* g*. Si* f *et* g *sont dérivables en* $t_0 \in I$*, on dit que* F *est* dérivable *en* t_0*. La dérivée de* F *en* t_0 *est* $F'(t_0) = (f'(t_0)\ ;\ g'(t_0))$.
Si F *est dérivable pour tout* $t \in I$*, on dit que* F *est* dérivable sur I.

Lorsque $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath}$*, alors le vecteur* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = f'(t)\vec{\imath} + g'(t)\vec{\jmath}$ *est le* vecteur dérivé *de* M.

Théorème 1.3.1
Soit $F = (f\ ;\ g)$ *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *de fonctions coordonnées* f *et* g *et soit* $\mathscr{C}$ *la courbe de représentation paramétrique* $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ *avec* $t \in I$.

Si f *et* g *sont dérivables en* $t_0 \in I$ *et si* $f'(t_0)$ *et* $g'(t_0)$ *ne sont pas simultanément nuls, La courbe* $\mathscr{C}$ *admet au point* M_0 *de paramètre* t_0 *un tangente dont un vecteur directeur a pour coordonnées* $(f'(t_0)\ ;\ g'(t_0))$*, c'est donc le vecteur* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0) = f'(t_0)\vec{\imath} + g'(t_0)\vec{\jmath}$.

☛ Cas particuliers :

a. Lorsque $f'(t_0) = 0$ et $g'(t_0) \neq 0$, le vecteur dérivé (non nul) est colinéaire à $\vec{\jmath}$ donc la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

b. Lorsque $f'(t_0) \neq 0$ et $g'(t_0) = 0$, le vecteur dérivé (non nul) est colinéaire à $\vec{\imath}$ donc la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

c. Lorsque $f'(t_0) \neq 0$, la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $m = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$.

Théorème 1.3.2
Lorsque $f'(t_0) = g'(t_0) = 0$*, le point* M_0 *de paramètre* t_0 *est un* point singulier *de* $\mathscr{C}$.
Lorsque $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ *a une limite* $m \in \mathbb{R}$ *ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *quand* t *tend vers* t_0*, la courbe* $\mathscr{C}$ *a une tangente au point* M_0 *de paramètre* t_0 *de coefficient directeur* m *(si la limite est infinie, la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées).*

☛ Lorque t désigne le temps, les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ et $\dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0)$ sont alors les vecteurs vitesse et accélération du point M à l'instant t_0.

2 Exemples de courbes définies paramétriquement

2.1 Introduction

On veut construire la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

On cherche les ensembles de définition de f et de g. On examine ensuite la périodicité et la parité des fonctions f et g pour réduire l'ensemble d'étude (on obtient souvent des propriétés de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$).

On peut également comparer les points M et M' de paramètres t et t' (c'est généralement indiqué dans l'énoncé) avec $t' = \dfrac{T}{2} - t$ ou $t' = \dfrac{T}{2} + t$ etc. (T étant une période commune à f et à g).

On étudie ensuite les variations de f et g sur l'ensemble d'étude et on dresse le tableau de variation commun à f et g.

On étudie ensuite les tangentes parallèles aux axes de coordonnées et celles pour les points singuliers éventuels, puis on construit la courbe $\mathscr{C}$.

2.2 Exemple de courbe de LISSAJOUS [1]

Il s'agit de construire la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique :

$$x = f(t) = \sin(t) \ \text{ et } \ y = g(t) = \sin(2t) \ \text{ avec } \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier la périodicité et la parité de f et de g et calculer $f(t+\pi)$, $g(t+\pi)$, $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$.
En déduire que l'on peut étudier f et g sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. *Jules* Antoine LISSAJOUS, physicien français (1822 – 1880).

b. Étudier les variations de f et g sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Indiquer les tangentes parallèles aux axes de coordonnées et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

d. Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$ est $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$.

2.3 Astroïde (hypocycloïde à 4 points de rebroussement)

Il s'agit de construire la courbe $\mathscr{C}$ de représentation paramétrique :

$$x = f(t) = 4\cos^3(t) \ \text{ et } \ y = g(t) = 4\sin^3(t) \ \text{ avec } \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier la périodicité et la parité de f et de g et calculer $f(\pi - t)$ et $g(\pi - t)$.
En déduire que l'on peut étudier f et g sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. Étudier les variations de f et g sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Calculer la limite de $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures puis quand t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.
En déduire les tangentes aux points singuliers.

d. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

Note
Une *astroïde* peut être générée par un point d'un cercle qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon quatre fois plus grand.