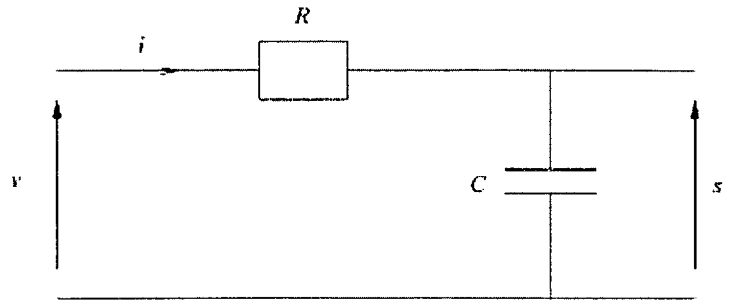
Exercice 1 (10 points)

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous.



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i.
Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$RCs'(t) + s(t) = v(t). \tag{1}$$

De plus, on suppose que $s(t) = 0$, pour tout nombre réel t négatif ou nul.
Pour tout l'exercice, on considère que $R = 250.10^3\,\Omega$ et $C = 20.10^{-9}$ F.
On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

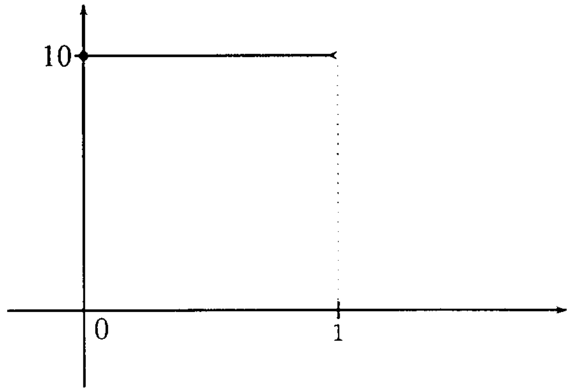
$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Les parties A, B et C de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : QCM

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte 1 point, ***une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.***

1. La fonction f est un créneau représenté par le schéma suivant :



$f(t)$ est défini par :

- $\bullet\, 10\mathscr{U}(t-1)$
- $\bullet\, 10\left[\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)\right]$
- $\bullet\, 10\mathscr{U}(t)$
- $\bullet\, \mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)$

2. On note V et S les transformées de Laplace respectives des fonctions v et s.
On précise que $s(0^+)=0$. Les transformées de Laplace V et S sont telles que :

- $\bullet\, S(p)=\dfrac{1}{1+0,005p}V(p)$
- $\bullet\, s(t)=\dfrac{1}{1+0,005p^2}V(p)$
- $\bullet\, S(p)=\dfrac{0,005}{0,005+p}V(p)$
- $\bullet\, S(p)=(1+0,005p)V(p)$

3. Dans cette question, on suppose que $v(t)=2$ pour tout nombre réel t positif ou nul. L'équation différentielle (1) s'écrit alors :

$$0,005s'(t)+s(t)=2.$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, la solution générale s de l'équation différentielle (1) est définie, k étant une constante réelle, par :

- $\bullet\, s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2t$
- $\bullet\, s(t)=k\mathrm{e}^{200t}+2$
- $\bullet\, s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2$
- $\bullet\, s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}$

Partie B : simulation numérique

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal discret causal x et la tension de sortie s par un signal discret causal y.
Un pas de discrétisation T_e étant choisi, les signaux x et y vérifient, pour tout nombre entier n, l'équation :

$$0,005\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+y(n)=x(n). \qquad (2)$$

1. Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $T_e=0,5\cdot 10^{-3}$s.
Montrer que l'équation (2) s'écrit alors :

$$11y(n)-10y(n-1)=x(n).$$

2. On suppose désormais que $x(n) = 2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini par $e(n) = 1$ pour tout entier naturel n.

   (a) Montrer que la transformée en Z du signal discret y, notée $Y(z)$, vérifie :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{11} \times \frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{10}{11}\right)}.$$

   (b) Vérifier que :

$$Y(z) = \frac{2}{11}\left(\frac{11z}{z-1} - \frac{10z}{z-\frac{10}{11}}\right).$$

   (c) En déduire l'expression de $Y(z)$ sous forme d'une somme.

3. (a) Exprimer $y(n)$ en fonction de n, pour tout nombre entier naturel n.

   (b) Calculer la limite de $y(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

On admet que $y(n) = 2 - 2\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$.

1. Compléter le tableau de valeurs du signal numérique y figurant sur le document réponse numéro 1. Les résultats seront arrondis au centième.
2. Représenter graphiquement le signal numérique y sur la figure 1 du document réponse numéro 1.

Document réponse numéro 1 à joindre à la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$		0,35				0,87			1,15		1,30

Tableau de valeurs de la suite y (à compléter)

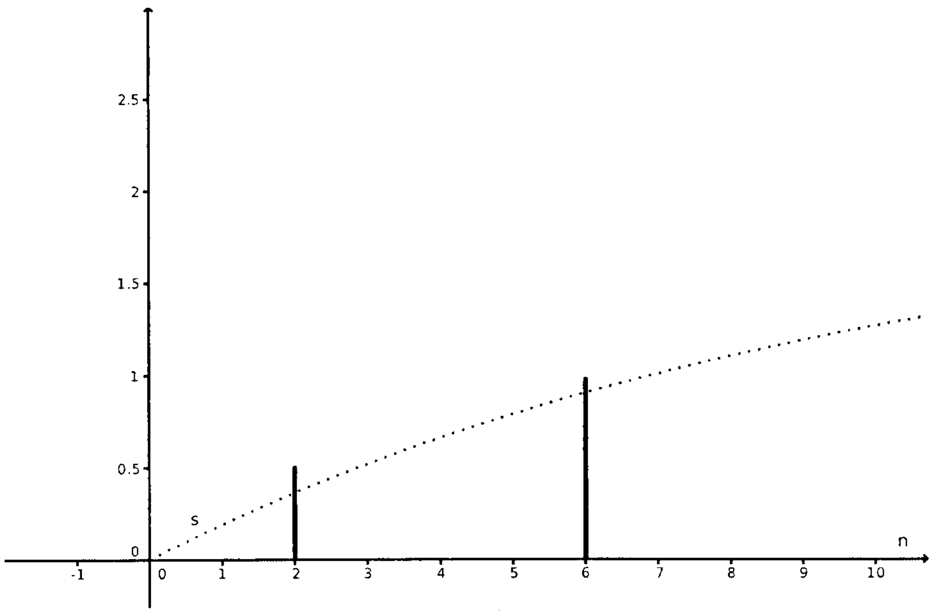


Figure 1 (à compléter)