Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,5t + 0,5 & \text{si } -1 < t < 1 \\ f(1) = 0,5. \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$ en utilisant la figure 1 du document réponse.
2. Démontrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation ω.

   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.

   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.

   (a) Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure 2 du document réponse.

   (b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?

   (c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (f(t))^2\,dt.$$

   Démontrer que $f_{eff}^2 = \dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

(a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\dfrac{P}{f_{eff}^2}$.

(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

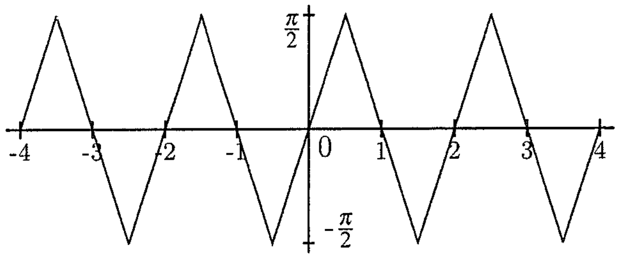
Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique, de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

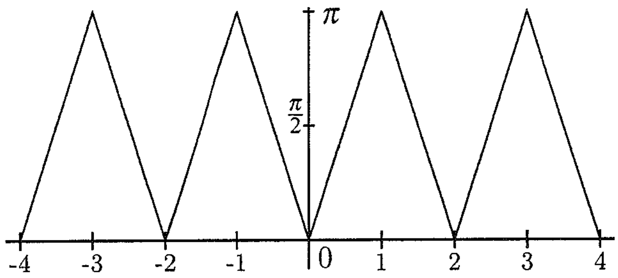
$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left((2p+1)\pi t\right).$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Sur l'annexe sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\,;4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;\,1]$.

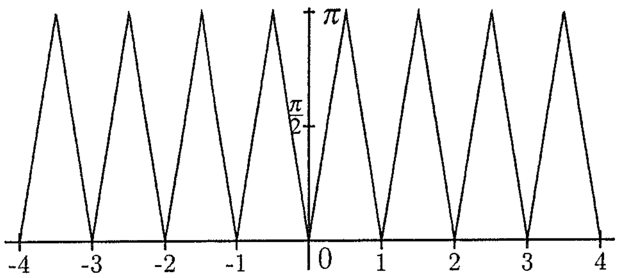
Annexe



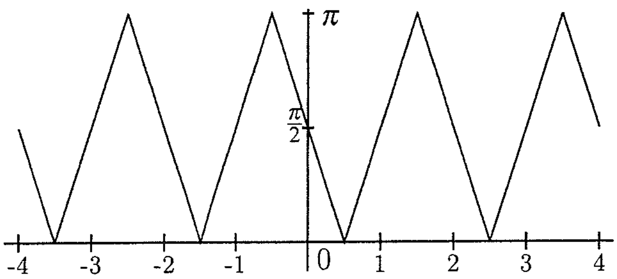
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Document réponse à joindre à la copie

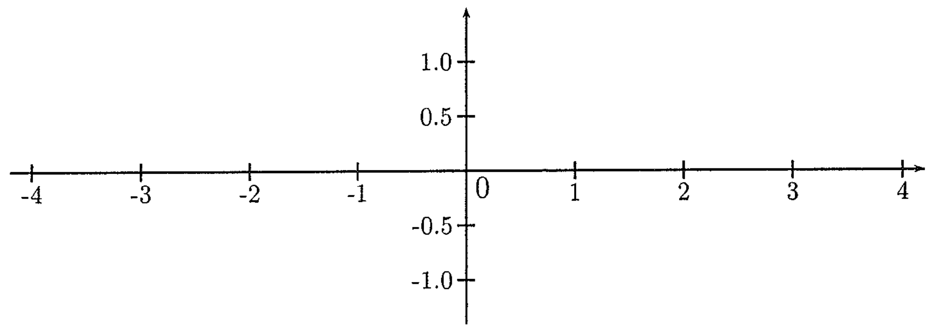


Figure 1 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

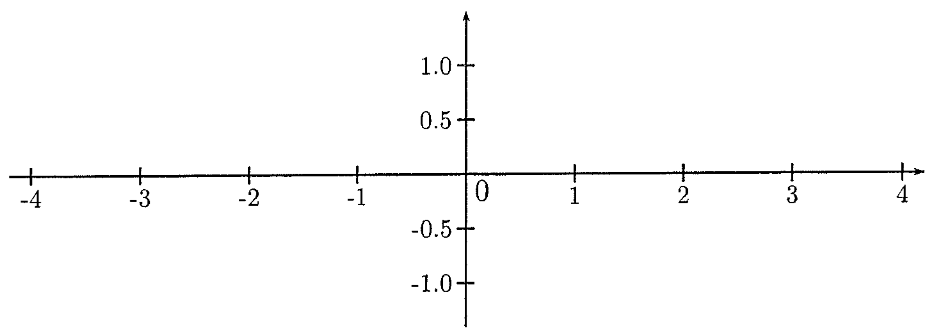


Figure 2 : représentation graphique de la fonction g (à compléter)