BTS, groupement A, mai 2012 – corrigé de l'exercice 2

Partie A

$$\boxed{(\mathcal{E}) : RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)}$$

1. b. *Calcul de* $E(p)$

   Comme $e(t) = 10\mathcal{U}(t)$ on a $E(p) = \dfrac{10}{p}$.

2. *Calcul de* $V(p)$

   D'après le formulaire, sachant que $v(0+) = 0$, on a $\mathscr{L}\left(\dfrac{dv(t)}{dt}\right) = pV(p) - v(0+) = V(p)$.

   En utilisant la transformation de LAPLACE dans l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ et en remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} RCpV(p) + V(p) &= E(p) \\ (1 + RCp)V(p) &= E(p). \end{aligned}$$

   On a donc, pour tout $p > 0$, $V(p) = \dfrac{10}{p(1 + RCp)}$.

3. a. *Décomposition de* $V(p)$

   Par réduction au même dénominateur, on a, pour tout $p > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}} &= \frac{10}{p\left(p + \frac{1}{RC}\right)} \times \left(p + \frac{1}{RC} - p\right) \\ &= \frac{10}{p\left(p + \frac{1}{RC}\right)} \times \frac{1}{RC} \\ &= \frac{10}{p(1 + RCp)}. \end{aligned}$$

   On a donc, pour tout $p > 0$, $V(p) = \dfrac{10}{p} - \dfrac{10}{p + \frac{1}{RC}}$.

   b. *Calcul de* $v(t)$ *pour* $t \geqslant 0$

   Par lecture inverse de la table des transformées de LAPLACE, on obtient :

$$v(t) = 10\mathcal{U}(t) - 10e^{-\frac{t}{RC}}\,\mathcal{U}(t) \text{ donc, pour tout } t \geqslant 0,\ v(t) = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Partie B

$$\boxed{T(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}}$$

1. *Autre expression de* $T(\omega)$

   On a $T(\omega) = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{jC\omega\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$ donc $T(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ car $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.

2. *Module et orgument de* $\mathrm{T}(\omega_0)$

   On a $\mathrm{T}(\omega_0) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}} = \dfrac{1-\mathrm{j}}{2}$.

   Ainsi $|\mathrm{T}(\omega_0)| = \dfrac{1}{|1+\mathrm{j}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg\left(\mathrm{T}(\omega_0)\right) = \arg\dfrac{1}{1+\mathrm{j}} = -\arg(1+\mathrm{j}) = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

3. *Réponses au* Q. C. M.

   a. *Module de* $\mathrm{T}(\omega)$

   $\mathrm{T}(\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ donc $|\mathrm{T}(\omega)| = \dfrac{1}{\left|1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$.

   b. *Argument de* $\mathrm{T}(\omega)$

   $\arg\left(1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ car $\mathrm{Re}\left(1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) > 0$ et $\arg(a+\mathrm{j}b) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$ lorsque $z = a+\mathrm{j}b$ avec a et b deux nombres réels et $a > 0$.

   Ainsi, $\arg(\mathrm{T}(\omega)) = -\arg\left(1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) \pmod{2\pi}$.

4. *Concordance des résultats avec ceux de la question 2*

   $|\mathrm{T}(\omega_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg(\mathrm{T}(\omega_0)) = -\arctan\left(\dfrac{\omega_0}{\omega_0}\right) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

5. *Gain du circuit correspondant à la pulsation* ω_0

   Pour $\omega = \omega_0$, le gain, en décibels, est $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln|\mathrm{T}(\omega_0)| = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = -\dfrac{10\ln(2)}{\ln(10)} = -3\,\mathrm{dB}$ à 1 dB près.

6. $\boxed{\omega_0 = 500 \text{ et } \varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{500}\right) \text{ avec } \omega > 0}$

   a. *Calcul de* $\varphi(\omega_0)$

   On a $\varphi(\omega_0) = -\arctan\left(\dfrac{500}{500}\right) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

   c. *Ordonnée du point* M_0

   Graphiquement, l'ordonnée du point M_0 est $G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = -3\,\mathrm{dB}$.

7. *Comparaison de* ω_1*, pulsation correspondant au point* M_1*, avec* $\omega_0 = 500$

   D'après le graphique, $\varphi(\omega_1) < \varphi(\omega_0) = \varphi(500)$.

   Comme la fonction φ est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, si $a < b$ alors $\varphi(a) > \varphi(b)$.

   Si on avait $\omega_1 = 500$ alors $\varphi(\omega_1) = \varphi(500)$, ce qui est faux car M_1 et M_0 sont distincts, et si on avait $\omega_1 < 500$ alors $\varphi(\omega_1) > \varphi(500)$ ce qui est également faux donc $\omega_1 > 500$.