

Terminales S (enseignement de spécialité)
Corrigé du devoir à la maison n° 6

EXERCICE 1

1. a. *Divisibilité de $3n^3 - 11n + 48$ par $n + 3$*

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 & - 11x + 8 & x + 3 \\
 - (3x^3 + 9x^2) & & 3x^2 - 9x + 16 \\
 \hline
 & - 9x^2 - 11x & \\
 & - (9x^2 - 27x) & \\
 \hline
 & 16x + 48 & \\
 & - (16x + 48) & \\
 \hline
 & 0 &
 \end{array}$$

Donc, pour tout réel x , $3x^3 - 11x + 48 = (x + 3)(3x^2 - 9x + 16)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $3n^3 - 11n + 48 = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16)$ et comme $3n^2 - 9n + 16$ est un nombre entier, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

b. $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul, pour tout entier naturel n

Comme n est un entier naturel, $3n^2 - 9n + 16$ est un nombre entier.

Le trinôme $3x^2 - 9x + 16$ n'a pas de racine réelle car son discriminant est strictement négatif, ainsi, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 - 9x + 16 > 0$.

Donc, pour tout entier naturel n , $3n^2 - 9n + 16 > 0$, ainsi, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. La question 2 est une question de cours (ROC).

3. *Simplification de PGCD ($3n^3 - 11n$; $n + 3$)*

On applique l'égalité $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b)$ avec $b = n + 3$, $c = 3n^3 - 9n + 16$ et $a = 3n^3 - 11n$ (a est un entier naturel car $3n^3 - 11n > 0$ pour $n \geq 2$).

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3)$.

4. a. *Ensemble des diviseurs entiers naturels de 48*

Cet ensemble est $D(48) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$.

b. *Ensemble des entiers naturels n tels que $x_n = \frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel*

Tout d'abord, pour que $x_n \in \mathbb{N}$, il est nécessaire que $3n^3 - 11n \geq 0$, ceci implique que $n = 0$ ou $n \geq 2$.

- Pour $n = 0$, $x_0 = 0$ est un entier naturel.
- Pour $n \geq 2$, $x_n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si $n + 3$ divise $3n^3 - 11n$ donc si, et seulement si $n + 3$ divise $\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3)$, c'est-à-dire si, et seulement si $n + 3$ est un diviseur de 48, diviseur positif et supérieur ou égal à 5 car $n \geq 2$.

On obtient :

$n + 3$	6	8	12	16	24	48
n	3	5	9	13	21	45

Ainsi, $x_n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si $n \in \{0 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ; 45\}$.

EXERCICE 2 : n° 143 page 75 – le phare breton

1. Résolution de (E) : $15q - 28q' = 6$ dans \mathbb{Z}^2

On a $15 \times 2 - 28 \times 1 = 30 - 28 = 2$ donc $15 \times 6 - 28 \times 3 = 6$, ainsi, $(6 ; 3)$ est une solution particulière de (E).

En utilisant cette solution particulière, on obtient l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

$$S_1 = \{(6 + 28k ; 3 + 15k) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Solutions du système (S)

Le système (S) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{28} \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x = 2 + 15q \\ x = 8 + 28q' \end{cases}$ avec $(q ; q') \in \mathbb{Z}^2$ donc à

$$\begin{cases} x = 2 + 15q \\ 2 + 15q = 8 + 28q' \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 2 + 15q \\ 15q - 28q' = 6 \end{cases} \text{ et, en utilisant le résultat de la question précédente}$$
$$\begin{cases} x = 2 + 15q \\ q = 6 + 28k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ ainsi } x = 2 + 15(6 + 28k) = 92 + 420k.$$

L'ensemble des solutions du système (S) est :

$$S_2 = \{92 + 420k / k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Première apparition des deux signaux lumineux simultanément

- Le signal jaune est émis toutes les 15 minutes à partir de 0 h 02 min donc il sera visible pour tous les instants $t \equiv 2 \pmod{15}$.
- Le signal rouge est émis toutes les 28 minutes à partir de 0 h 08 min donc il sera visible pour tous les instants $t' \equiv 8 \pmod{28}$.

Les deux signaux seront visibles en même temps, pour les instants x tels que $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 8 \pmod{28} \end{cases}$
et d'après la question précédente, $x = 92 + 420k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, les deux signaux seront visibles en même temps pour la première fois lorsque $k = 0$ soit $x = 92$ minutes, c'est-à-dire à 1 h 32 min.