Terminales S – devoir en classe n° 7

Jeudi 27 mars 2013

EXERCICE 1

Une étude statistique a montré que la durée de vie en années X d'un disque dur était une variable aléatoire suivant une loi exponentielle et que la durée de vie moyenne d'un disque dur était de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X.
2. Le disque dur est garanti 2 ans. Quelle proportion, à 10^{-2} près, de disques durs sera retournée au fournisseur pour cause de panne ?
3. Calculer $P(X \geqslant 3)$ et interpréter ce résultat.
4. Sachant qu'un disque dur n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité, à $0,01$ près, que sa durée de vie totale dépasse 5 ans ?

EXERCICE 2

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses. Vous recopierez sur votre copie la phrase avec la ou les bonnes réponses. *Chaque question est notée sur 1 point. Pour obtenir le point, il faut trouver **toutes** les bonnes réponses.*

1. la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ vérifie pour tout nombre x et y l'équation fonctionnelle suivante :

   $\star$ $f(x) + f(y) = f(xy)$ $\star$ $f(x)\,f(y) = f(x+y)$

   $\star$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x-y)$ $\star$ $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

2. Le nombre $A = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^5 \times e$ peut également s'écrire :

   $\star$ e^{13} $\star$ e^7

   $\star$ e^{-6} $\star$ e^{-30}

3. f est une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Alors :

   $\star$ Si $u_n = f\left(e^{-n}\right)$, alors (u_n) est croissante $\star$ Si $u_n = f\left(e^{n}\right)$, alors (u_n) est croissante

   $\star$ Si $u_n = e^{f(-n)}$, alors (u_n) est décroissante $\star$ Si $u_n = e^{f(n)}$, alors (u_n) est décroissante

4. L'ensemble solution de l'inéquation $(e^x+3)(e^x-1) \geqslant 0$ est :

   $\star$ $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$ $\star$ $[0;+\infty[$

   $\star$ $]-\infty;0]$ $\star$ $\mathbb{R}$

5. Soit $I = \displaystyle\int_0^a \left(e^{2x} - x\right) dx$, avec $a \in \mathbb{R}$

   $\star$ $I = e^{2a} - a$ $\star$ $I = e^{2a} - \dfrac{1}{2}a^2$

   $\star$ $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2 - 1\right)$ $\star$ $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2\right) - 1$

EXERCICE 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = -(x+1)e^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. (On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près).

Partie B

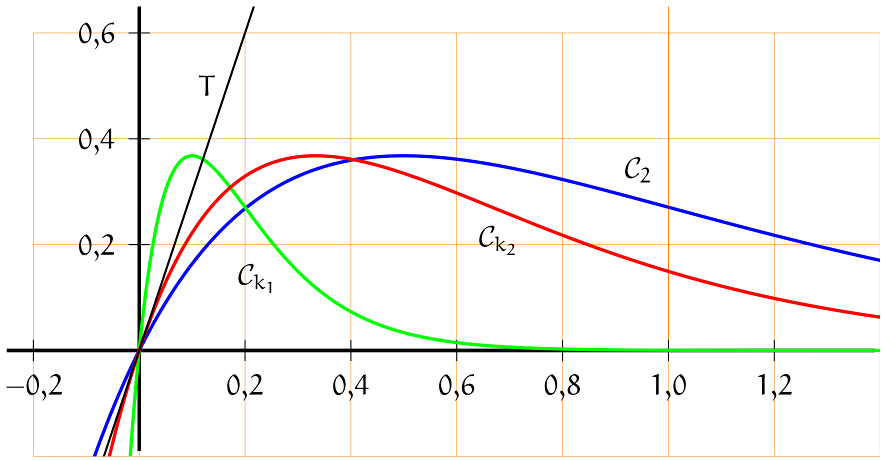
Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On remarque que la fonction f_1 est la fonction f de la partie A, et que la courbe $\mathcal{C}_1$ est donc la courbe $\mathcal{C}$.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{k_1}$ et $\mathcal{C}_{k_2}$ où k_1 et k_2 sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_{k_2}$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f'_k(x) = k(1-kx)e^{-kx}.$$

   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c. En observant le graphique ci-dessus, comparer k_1 et 2. Expliquer la démarche.

   d. Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

   e. En déduire à l'aide du graphique une valeur de k_2.

Terminales S – devoir en classe n° 7
Jeudi 27 mars 2013

EXERCICE 1

Une étude statistique a montré que la durée de vie en années X d'un disque dur était une variable aléatoire suivant une loi exponentielle et que la durée de vie moyenne d'un disque dur était de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X.
2. Le disque dur est garanti 2 ans. Quelle proportion, à 10^{-2} près, de disques durs sera retournée au fournisseur pour cause de panne ?
3. Calculer $P(X \geqslant 3)$ et interpréter ce résultat.
4. Sachant qu'un disque dur n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité, à $0,01$ près, que sa durée de vie totale dépasse 5 ans ?

EXERCICE 2

Pour chaque question, trouver la ou les bonnes réponses. Vous recopierez sur votre copie la phrase avec la ou les bonnes réponses. *Chaque question est notée sur 1 point. Pour obtenir le point, il faut trouver **toutes** les bonnes réponses.*

1. la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ vérifie pour tout nombre x et y l'équation fonctionnelle suivante :

   $\star$ $f(x)\,f(y) = f(x+y)$ $\qquad$ $\star$ $f(x) + f(y) = f(xy)$

   $\star$ $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ $\qquad$ $\star$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x-y)$

2. Le nombre $A = e^3 \times \left(e^{-2}\right)^5 \times e$ peut également s'écrire :

   $\star$ e^{-30} $\qquad$ $\star$ e^{-6}

   $\star$ e^{7} $\qquad$ $\star$ e^{13}

3. f est une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Alors :

   $\star$ Si $u_n = f\left(e^n\right)$, alors (u_n) est croissante $\qquad$ $\star$ Si $u_n = f\left(e^{-n}\right)$, alors (u_n) est croissante

   $\star$ Si $u_n = e^{f(n)}$, alors (u_n) est décroissante $\qquad$ $\star$ Si $u_n = e^{f(-n)}$, alors (u_n) est décroissante

4. L'ensemble solution de l'inéquation $(e^x+3)(e^x-1) \geqslant 0$ est :

   $\star$ $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\star$ $]-\infty;0]$

   $\star$ $[0;+\infty[$ $\qquad$ $\star$ $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

5. Soit $I = \displaystyle\int_0^a \left(e^{2x} - x\right) dx$, avec $a \in \mathbb{R}$

   $\star$ $I = e^{2a} - \dfrac{1}{2}a^2$ $\qquad$ $\star$ $I = e^{2a} - a$

   $\star$ $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2\right) - 1$ $\qquad$ $\star$ $I = \dfrac{1}{2}\left(e^{2a} - a^2 - 1\right)$

EXERCICE 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g(x) = -(x+1)e^{-x}$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. (On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près).

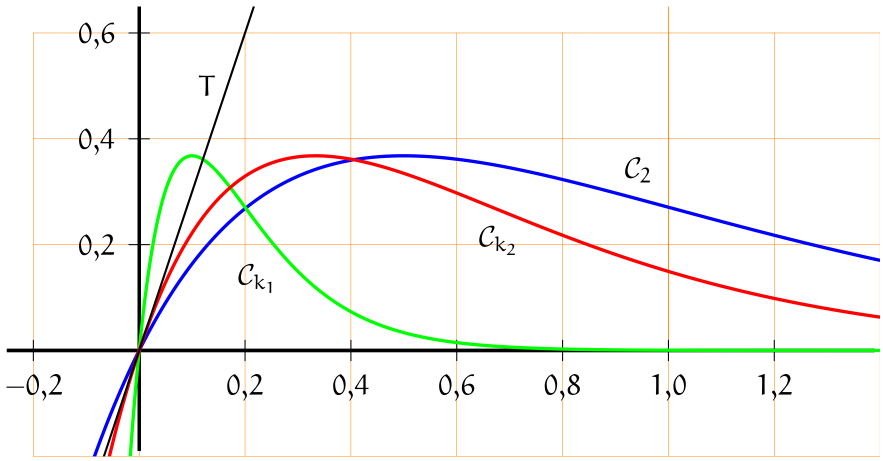
Partie B

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On remarque que la fonction f_1 est la fonction f de la partie A, et que la courbe $\mathcal{C}_1$ est donc la courbe $\mathcal{C}$.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{k_1}$ et $\mathcal{C}_{k_2}$ où k_1 et k_2 sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_{k_2}$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. **a.** Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)e^{-kx}.$$

   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c. En observant le graphique ci-dessus, comparer k_1 et 2. Expliquer la démarche.

   d. Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

   e. En déduire à l'aide du graphique une valeur de k_2.