Terminale S_4 – corrigé du devoir à la maison n° 7

EXERCICE 1 – étude d'une suite définie par une intégrale (n° 102 page 183)

1. $\boxed{f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1 \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

   a. *Variations de* f

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -xe^{-x}$.

   Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$, ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   Remarque : en posant $y = -x$ on peut démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

   b. *Signe de la fonction* f

   D'après les variations de f, la fonction f possède un maximum sur $\mathbb{R}$ en 0 égal à $f(0) = 0$, donc $f \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. $\boxed{g(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \text{ avec } x \in]0\,;\,+\infty[}$

   a. *Variations de* g

   La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{x^2}$.

   Comme $f'(x) < 0$ pour tout réel $x > 0$, $g' < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. *Signe de* g

   Pour tout réel $x > 0$, $-x < 0$ donc $e^{-x} < e^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi $e^{-x} < 1$ donc $1 - e^{-x} > 0$.

   Donc, pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} > 0$.

3. $\boxed{J_n = \int_n^{n+1} g(x)dx, \text{ n étant un entier naturel non nul}}$

   a. *Comparaison de* $g(n)$, $g(x)$ *et* $g(n+1)$ *pour* $n \leqslant x \leqslant n+1$

   La fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc, si $0 < n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $g(n+1) \leqslant g(x) \leqslant g(n)$.

   b. *Encadrement de* J_n

   D'après la question précédente, $\displaystyle\int_n^{n+1} g(n+1)dx \leqslant \int_n^{n+1} g(x)dx \leqslant \int_n^{n+1} g(n)dx$, car $n < n+1$,

   soit, $g(n+1)\displaystyle\int_n^{n+1} dx \leqslant J_n \leqslant g(n)\int_n^{n+1} dx$.

   Or $\displaystyle\int_n^{n+1} dx = (n+1) - n = 1$, donc, $g(n+1) \leqslant J_n \leqslant g(n)$.

   c. *Sens de variation de* (J_n)

   Pour tout entier naturel n non nul, on a $g(n+1) \leqslant J_n \leqslant g(n)$ et $g(n+2) \leqslant J_{n+1} \leqslant g(n+1)$ donc, par transitivité, $g(n+2) \leqslant J_{n+1} \leqslant g(n+1) \leqslant J_n \leqslant g(n)$ soit $J_{n+1} \leqslant J_n$.

   La suite (J_n) est décroissante.

   d. *Convergence de* (J_n)

   Comme $g > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)dx \geqslant 0$.

   La suite (J_n) est décroissante et minorée (par 0), donc la suite (J_n) converge.

   On a $g(n) = \dfrac{1-e^{-n}}{n} = \dfrac{1}{n}(1-e^{-n})$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-n}\right) = 1$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = 0$.

On a donc $g(n+1) \leqslant J_n \leqslant g(n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n+1) = 0$, d'après le théorème « des gendarmes », la suite (J_n) converge vers 0.

EXERCICE 2 – étude d'une fonction définie par une intégrale

$$\boxed{F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt \text{ avec } x \in I =]0\,;\,+\infty[}$$

1. *Dérivée de* f

   La fonction $x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ étant continue sur I, elle possède des primitives sur I et F est la primitive de f sur I qui s'annule en 1.

   Ainsi, F est dérivable sur I et pour tout $x > 0$, $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

2. *Variations et signe de* F *sur* I

   Pour tout $x \in I$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$ donc $F' > 0$ sur I, ainsi, F est strictement croissante sur I.

   Comme $F(1) = 0$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) > 0 \text{ pour } x > 1 \\ F(x) = 0 \text{ pour } x = 1 \\ F(x) < 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \end{array}}$$

3. a. *Première inégalité sur la fonction* f

   Pour $t \geqslant 0$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $e^t \geqslant e^0$ soit $e^t \geqslant 1$.

   Or $t^2 > 0$ pour $t > 0$ donc $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2}$ pour tout réel $t > 0$.

   b. *Calcul de* $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

   Pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$.

   c. *Inégalité sur la fonction* F *pour* $x \in]0\,;\,1]$

   On a $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2}$ pour tout réel $t > 0$ donc $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$ car $x \leqslant 1$, ainsi, $F(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x \in]0\,;\,1]$.

   d. *Limite de* F *en* 0

   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (car $x > 0$) donc $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et comme $F(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x}$, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = -\infty$

4. a. *Deuxième inégalité sur la fonction* f

   Si $x \geqslant 1$ et $t \in [1\,;\,x]$ alors $1 \leqslant t \leqslant x$ donc $\dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{x^2}$ car la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Or $e^t > 0$ pour tout réel t donc $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{e^t}{x^2}$ pour tout réel $x > 1$ et tout réel $t \in [1\,;\,x]$.

   b. *Inégalité sur la fonction* F *pour* $x \in [1\,;\,+\infty[$

   Comme $x \geqslant 1$, si $\dfrac{e^t}{t^2} \geqslant \dfrac{e^t}{x^2}$ alors $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt \geqslant \int_1^x \frac{e^t}{x^2}dt$ donc $F(x) \geqslant \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_1^x e^t dt$.

   Or $\displaystyle\int_1^x e^t dt = \left[e^t\right]_1^x = e^x - e$, donc, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \geqslant \dfrac{e^x - e}{x^2}$.

   c. *Limite de* F *en* $+\infty$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2} - e \times \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$.