CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Exercice 1 – QCM

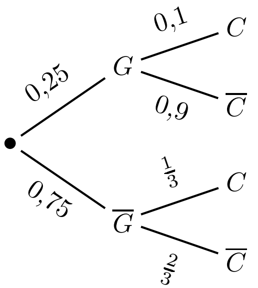
1. *Probabilité de B avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}65$ sachant que A et B sont indépendants*

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Or A et B sont indépendants. Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
   D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$.
   $0{,}65 = 0{,}3 + P(B) - 0{,}3 \times P(B)$
   $0{,}7 \times P(B) = 0{,}65$ donc $P(B) = \dfrac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5$.

   Réponse a

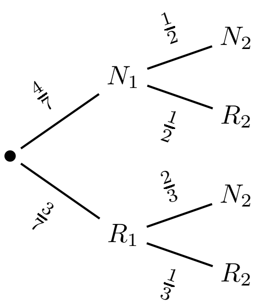
2. *Probabilité que l'élève ait son permis au premier essai*

   Soit G l'événement « l'élève est un garçon ».
   Soit C l'événement « l'élève a eu son permis à la première tentative ». L'énoncé se traduit par :



   On cherche $P(C)$.
   $P(C) = P(G \cap C) + P(\overline{G} \cap C)$
   $P(C) = 0{,}25 \times 0{,}1 + 0{,}75 \times \dfrac{1}{3}$
   $P(C) = 0{,}025 + 0{,}25 = 0{,}275$
   Réponse b

3. *Sachant que l'une au moins des deux boules tirées est noire, probabilité que la seconde soit noire*



   - Soit A l'événement « avoir au moins une boule noire ». Soit N_2 l'événement « la seconde boule tirée est noire ».
     On cherche $P_A(N_2) = \dfrac{P(A \cap N_2)}{P(A)}$.
   - $P(A) = P(N_1) + P(R_1 \cap N_2) = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{7}$.
   - $P(A \cap N_2) = P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap N_2)$
     $P(A \cap N_2) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{7}$.
   - Ainsi $P_A(N_2) = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{6}{7}} = \dfrac{2}{3}$.

   Réponse d

4. *Probabilité que le représentant ait vendu exactement deux produits*
   Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de produits vendus dans la matinée. Les ventes sont indépendantes, X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}2$.
   On en déduit $P(X = 2) = \dbinom{5}{2} \times 0{,}2^2 \times (1 - 0{,}2)^{5-2} = 0{,}2048$.
   Réponse d

5. *Propriété des évènements A, C et F*
   $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $P(C) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
   L'événement $A \cap C$ est « la carte tirée est l'as de coeur » et $P(A \cap C) = \dfrac{1}{32}$.
   Ainsi, $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{32} = P(A \cap C)$, donc A et C sont indépendants.
   Réponse a

Exercice 2

1. a. *Probabilité de C : « le sac présente le défaut a et le défaut b*
   $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car A et B sont indépendants.
   Donc $P(C) = 0{,}02 \times 0{,}01 = 0{,}000\,2$.

   b. *Probabilité de D : « le sac est défectueux »*
   $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}000\,2 = 0{,}029\,8$.

   c. *Probabilité de E : « le sac ne présente aucun défaut »*
   $P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}029\,8 = 0{,}970\,2$.

   d. *Sachant que le sac a le défaut a, probabilité qu'il présente aussi le défaut b*
   On cherche $P_A(B)$. Or A et B sont indépendants, donc $P_A(B) = P(B) = 0{,}01$.

2. a. *Loi suivie par X*
   Le tirage est assimilé à un tirage avec remise. On répète donc 100 fois une même expérience aléatoire, chaque expérience étant indépendante des autres.
   La probabilité d'obtenir un sac défectueux est 0,03.
   La variable aléatoire X compte le nombre de sacs défectueux. Elle suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$ et on a $q = 1 - p = 0{,}97$.

b. *Probabilité qu'au moins un sac soit défectueux*

On cherche $P(X \geqslant 1)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^{100} = 1 - 0{,}97^{100} = 0{,}95$ au centième près.

c. *Espérance mathématique de X*

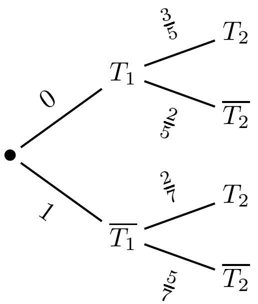
$E(X) = np = 100 \times 0{,}03 = 3$. En moyenne, sur 100 sacs prélevés, il y a 3 sacs défectueux.

Exercice 3

1. *Valeur de p_1*

On suppose qu'aucun problème technique ne se produit lors de la mise en service correspondant au premier jour, donc $p_1 = 0$.

2. *Calcul de p_2*



$p_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$ donc

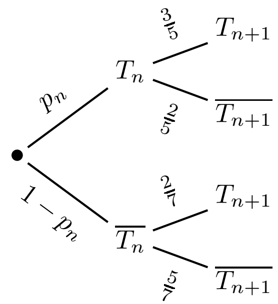
$p_2 = 0 \times \dfrac{3}{5} + 1 \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{7}$

3. *Probabilité que l'attraction n'ait aucun problème technique au cours des sept premiers jours*

Cette probabilité est égale à :

$$P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \overline{T_3} \cap \overline{T_4} \cap \overline{T_5} \cap \overline{T_6} \cap \overline{T_7}) = 1 \times \left(\frac{5}{7}\right)^6 = 0{,}13 \text{ à } 0{,}01 \text{ près.}$$

4. a. *Arbre pondéré*



b. *Relation entre p_{n+1} et p_n*

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{3}{5} + (1 - p_n) \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{3}{5} p_n + \frac{2}{7} - \frac{2}{7} p_n. \end{aligned}$$

Donc $p_{n+1} = \dfrac{11}{35} p_n + \dfrac{2}{7}$.

5. a. *Nature de la suite (U_n) définie par $U_n = p_n - \dfrac{5}{12}$*

$$U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{12} = \frac{2}{7} + \frac{11}{35} p_n - \frac{5}{12} = \frac{11}{35} p_n - \frac{11}{84} = \frac{11}{35}\left(U_n - \frac{11}{84} \times \frac{35}{11}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{11}{35}\left(U_n - \frac{5}{12}\right) = \frac{11}{35} U_n.$$

Donc (U_n) est la suite géométrique de raison $q = \dfrac{11}{35}$ et de premier terme $U_1 = p_1 - \dfrac{5}{12} = -\dfrac{5}{12}$.

b. *Calcul de p_n en fonction de n*

On a $U_n = U_1\, q^{n-1} = -\dfrac{5}{12} \times \left(\dfrac{11}{35}\right)^{n-1}$ et $p_n = U_n + \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{12} - \dfrac{5}{12} \times \left(\dfrac{11}{35}\right)^{n-1}$.

c. *Limite de (p_n)*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{11}{35}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } 0 < \frac{11}{35} < 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{5}{12}.$$

Au cours du temps, la probabilité qu'un problème technique se produise va se stabiliser et s'approcher de $\dfrac{5}{12}$.

Question subsidiaire (problème du chevalier de Méré)

- *Probabilité d'obtenir au moins un six en lançant 4 fois un dé*

  Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de 6. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est $P(X \geqslant 1)$.

  $$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}517\,7 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

- *Probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés*

  Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de double six. Y suit la loi binomiale de paramètres $n' = 24$ et $p' = \dfrac{1}{36}$. La probabilité d'obtenir au moins un double six est $P(Y \geqslant 1)$.

  $$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}491\,4 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

- *Conclusion*

  On a donc plus de chances d'obtenir au moins un six en lançant 4 fois un dé que d'obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés.