Algorithmique : encadrement de l'intégrale d'une fonction continue et positive

<u>Partie 1 : cas d'une fonction croissante sur [0 ; 1]</u>

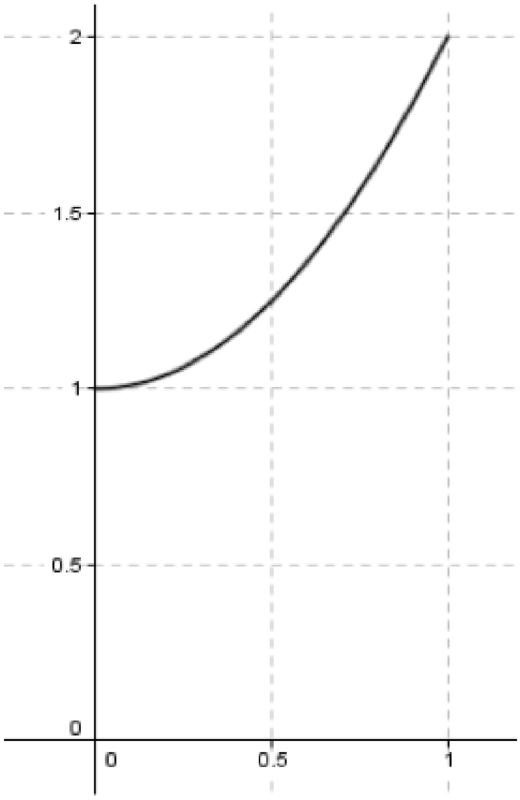
1) Valeur approchée par défaut

On s'intéresse à la fonction $x \mapsto x^2+1$ qui est croissante sur [0 ; 1].

On cherche à trouver une valeur approchée par défaut de $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

On partage l'intervalle [0 ; 1] en n sous-intervalles de même amplitude $h=\frac{1}{n}$.

On calcule l'aire des rectangles situés sous la courbe sur chaque sous-intervalle et on les additionne pour avoir la valeur approchée par défaut de $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir la valeur approchée par défaut de $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ après avoir choisi le nombre n de sous-intervalles.

Saisir n
h prend la valeur $\frac{1}{n}$
x prend la valeur 0
u prend la valeur 0
Pour i allant de 0 à $n-1$
    u prend la valeur $u+h\times(x^2+1)$
    x prend la valeur $x+h$
Fin Pour
Afficher u

Compléter le tableau ci-dessous dans le cas où $n=4$.

	h	u	x
Initialisation			
Étape $i=0$			
Étape $i=$			
Étape $i=$			
Étape $i=$			

Programmer l'algorithme.

Vérifier que pour $n=100$ on obtient $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}32835$.

2) Valeur approchée par excès

Modifier l'algorithme précédent pour obtenir la valeur approchée par excès de $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ après avoir choisi le nombre n de sous-intervalles. Vérifier que pour $n=100$ on obtient $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \approx 1{,}33835$.

3) Encadrement

Modifier l'algorithme précédent pour obtenir la valeur approchée par défaut et par excès de $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ après avoir choisi le nombre n de sous-intervalles. Vérifier que vous retrouvez les résultats précédents pour $n=100$.

4) Choix de l'intervalle

Modifier l'algorithme précédent pour obtenir un encadrement de $\int_a^b (x^2+1)\,\mathrm{d}x$ après avoir choisi le nombre n de sous-intervalles ainsi que les bornes a et b d'intégration (on choisira $0 \leqslant a < b$ pour avoir une fonction croissante et un intervalle [a ; b]). Vérifier que pour $n=100$ on obtient $22{,}536719 \leqslant \int_{1,5}^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \leqslant 22{,}880469$.

5) Nouvelle approximation par la méthode des trapèzes

Sur chaque sous-intervalle, on calcule l'aire du trapèze qui approche l'aire « sous la courbe » et on additionne l'aire des trapèzes de chaque sous- intervalle.

Programmer un algorithme faisant ce calcul. Vérifier que pour $n=100$ on obtient $\int_{1,5}^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \approx 22{,}708594$.

<u>Partie 2 : cas d'une fonction décroissante</u>

Reprendre les travaux de la partie 1 pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}$.