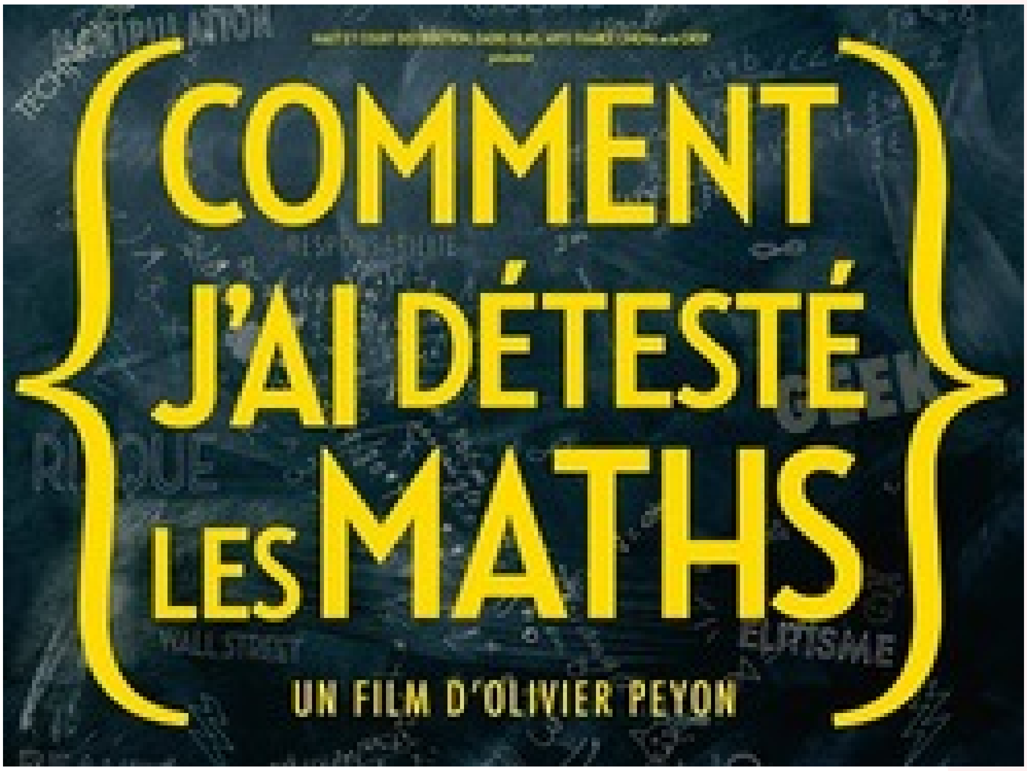
Mathématiques

2$^{\text{ale}}$5 / 2018-2019

Une année de mathématiques en 2$^{\text{nde}}$



Notre Dame
LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME N° 3

Order

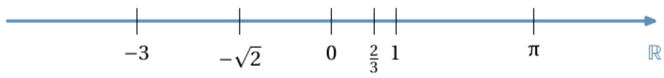
Nous avons établi au premier chapitre qu'il existait plusieurs ensembles de nombres. Il est temps de mettre un peu d'ordre dans tout ça. Nous allons voir comment comparer deux nombres. Ce sera l'occasion de découvrir une démarche mathématique pour étudier un problème en introduisant des définitions et des théorèmes. Pour que cela se fasse en douceur, nous allons découvrir Mathémator et son disciple Secondix.

1 Ordre dans R

1 1 Découverte du problème

Mathémator : Vous vous souvenez, cher disciple, que l'on peut représenter les nombres réels sur une droite orientée munie d'un repère :

Secondix: Oui ! Nous avons vu ça dans le chapitre précédent. Comme mon cours est très bien ordonné, je retrouve tout de suite la figure que nous avions tracée :



Mathémator : Tous les réels correspondent aux abscisses de cette droite et vice versa. Comment pourriez-vous classer les abscisses des points de cette droite ?

Secondix: Ben, comme il y a une flèche au bout, je dirais qu'on va du plus petit au plus grand en partant de la gauche vers la droite.

Mathémator : C'est l'idée mais il faudrait quelque chose de plus rigoureux pour pouvoir se débrouiller en calcul algébrique, c'est-à-dire avec des nombres a priori inconnus.

Secondix: Pfff... vous allez encore couper les cheveux en quatre et tout compliquer !

Mathémator : Mon petit Secondix, si vous ne savez pas exactement de quoi vous parlez, vous risquez de dire beaucoup de grosses bêtises. Et si vous n'avez pas de repères solides qu'on appelle les *définitions*, vous allez vous perdre dans le labyrinthe de la Science.
Mais je veux vous faire plaisir et nous n'allons pas remonter à l'origine de la connaissance humaine : nous supposerons que vous savez ce que signifie, pour un nombre, être positif ou négatif.

Secondix (à part): *Il me prend vraiment pour un idiot* **(tout haut)** Je crois que c'est à ma portée, Maître.

Mathémator : Fort bien, alors énonçons notre première définition qui servira de socle à tout ce chapitre :

Définition 3 - 1

Comparaison de deux nombres réels
Deux nombres a et b vérifient l'inéquation $a < b$ si, et seulement si, $a - b$ est négatif ou $b - a$ est positif.
Comparer deux nombres c'est étudier le *signe de leur différence*.

Secondix: Excusez-moi mais là, c'est vraiment de la torture gratuite de disciple. Je sais que 2 est plus petit que 3, je n'ai pas besoin de passer par votre définition alambiquée.

Mathémator : Tout doux mon jeune ami ! Prenez le temps de réfléchir avant d'émettre un jugement si radical.

1 2 Théorèmes de rangement

Recherche

Comment ranger des carrés ?
Considérons deux nombres quelconques a et b vérifiant $a < b$: comment sont rangés leurs carrés ?

Secondix: Par exemple, $2 < 3$ et $2^2 < 3^2$: ils sont rangés dans le même sens.

Mathémator : Mais $-3 < -2$ et cependant $(-3)^2 > (-2)^2$... Des exemples ne suffisent pas à conclure : que pensez-vous de -1 et 2 ? De -2 et 1 ?

Secondix: Oui mais s'ils sont tous positifs, ça marche.

Mathémator : Dois-je vous croire sur parole ? Il me faudrait une preuve car le terrain semble miné.
Suivons votre idée et considérons deux nombres **positifs** a et b tels que $a < b$. Pour comparer leurs carrés il faudrait, d'après notre définition, étudier le signe de leur différence. Allons-y ! Vous savez que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or a et b sont positifs donc $a + b$ l'est aussi.

De plus $a < b$ donc $a - b$ est négatif.
Ainsi, $a^2 - b^2$ est le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif.

Théorème 3 - 1

Règle des signes (admise)
Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

D'après la règle des signes, $a^2 - b^2$ est donc négatif, c'est-à-dire que $a^2 < b^2$.
Nous venons donc de *démontrer* que deux nombres *positifs quelconques* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre*.
Je vous laisse démontrer ce qui se passe pour deux nombres négatifs à titre d'exercice.

Secondix: Et s'ils ne sont pas de même signe ?

Mathémator : nous avons vu sur un exemple que la conclusion n'est pas aussi simple. Nous nous contenterons donc de comparer des carrés de nombres de même signe.

Théorème 3 - 2

Rangement des carrés
Deux nombres *positifs* et leurs carrés sont rangés *dans le même ordre*.

Deux nombres *négatifs* et leurs carrés sont rangés *dans l'ordre inverse*.

Pour ne pas que vous perdiez la main, vous démontrerez également à titre d'exercice le théorème suivant :

Théorème 3 - 3

Rangement des inverses
Deux nombres non nuls et de même signe et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse.

Secondix (à part): *le sale boulot, c'est toujours pour les mêmes...* **(tout haut)** Ce sera un plaisir, ô astre de la connaissance.

1 3 Ordre et opérations

Mathémator : Vous êtes plus léger qu'un gorille adulte.

Secondix: J'ai en effet surveillé mon alimentation ces derniers temps.

Mathémator : Bien ! Supposons qu'on vous mette dans les bras chacun un poids de 10kg : serez-vous toujours le plus léger ?

Secondix (à part): *Je me méfis de ses questions tordues* **(tout haut)** je pense que oui.

Mathémator : On doit pouvoir énoncer quelque chose de semblable pour les nombres :

Théorème 3 - 4

Addition d'un nombre aux deux membres d'une inégalité
Soit a, b et c trois nombres réels quelconques ; *si* $a < b$ *alors* $a+c < b+c$.
Ce qui signifie qu'additionner *un même nombre* (positif ou négatif) aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette inégalité.

Secondix: Bon ben voilà.

Mathémator : Pas si vite jeune disciple ! Notre illustration zoologique n'est pas une preuve : on pourrait être trompé par des images...
Notre seule arme à disposition est la définition 3 - 1 page ci-contre. Nous voulons *comparer* $a + c$ et $b + c$: il s'agit d'*étudier le signe* de leur différence. Allez-y !

Secondix: J'essaye : $a + c - b + c$.

Mathémator : STOP ! Vous oubliez les parenthèses : on doit retrancher le nombre $(b + c)$ au nombre $(a + c)$.

Secondix (à part): *Comment fait-il pour savoir oralement que j'ai oublié les parenthèses ?* **(tout haut)** Certes Maître, je reprends : $(a+c)-(b+c) = a+c-b-c = a-b+c-c = a-b$ euh... ah ! On sait que $a < b$ donc $a-b$ est négatif. Or $a-b = (a+c)-(b+c)$ donc $(a+c)-(b+c)$ est négatif aussi ce qui signifie que $a + c < b + c$.

Mathémator : Vous venez de mener brillamment votre première démonstration en algèbre !

Secondix: J'en suis tout bouleversé !

Mathémator : Afin de ménager vos émotions, nous allons nous contenter d'énoncer les théorèmes suivants et vous les démontrerez à titre d'exercice.
Nous avons additionné, il ne reste plus qu'à multiplier...

Secondix: Ben c'est pareil : si un élève de 2nde est plus léger qu'un gorille alors dix élèves de 2nde sont plus légers que dix gorilles.

Mathémator : Belle image, certes, mais qui peut être trompeuse : on a $2 < 3$ mais est-ce que $2(-1) < 3(-1)$? Soyons donc prudents avec les illustrations...

Théorème 3 - 5

Multiplication des deux membres d'une inégalité par un nombre
Soit trois nombres réels a, b et c tels que $a < b$ et $c \neq 0$.

- si c est *positif* alors $a \cdot c < b \cdot c$;
- si c est *négatif* alors $a \cdot c > b \cdot c$

Autrement dit :

- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *positif ne change pas le sens* de cette inégalité ;
- multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre *négatif change le sens* de cette inégalité.

Comme tout à l'heure, vous étudierez le signe d'une différence.

Secondix: Pourquoi avoir précisé $c \neq 0$?

Mathémator : Cherchez la réponse : elle est cachée dans votre brillant cerveau... Mais passons à autre chose.

Idée

Division par un même nombre
Une division est une multiplication par l'inverse donc la division membre à membre suit les mêmes règles que la multiplication membre à membre.

Maintenant, pour vous faire plaisir, reprenons un petit exemple : vous êtes plus léger qu'un gorille et votre sœur est plus légère qu'une baleine donc vous et votre sœur êtes plus légers qu'un gorille et une baleine réunis.

Théorème 3 - 6

addition membre à membre
Soit a, b, c et d quatre nombres réels. Alors

$$\left.\begin{array}{r} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Longrightarrow a + c < b + d$$

ce qui signifie qu'en additionnant membre à membre deux inégalités on n'en change pas le sens.

Pour le dernier théorème, nous ne donnerons pas de démonstration car elle est plus difficile et je ne voudrais pas vous décourager donc nous l'admettrons exceptionnellement..

Secondix (à part): *Enfin une bonne nouvelle* **(tout haut)** ah quel dommage !

Mathémator : Vous pouvez toujours vous y frottez si ça vous chante...

Théorème 3 - 7

Multiplication membre à membre
Soit a, b, c et d quatre nombres réels $\boxed{\text{POSITIFS}}$. Alors

$$\left.\begin{array}{r} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d$$

ce qui signifie qu'en multipliant membre à membre deux inégalités entre nombres POSITIFS on n'en change pas le sens.

Vous aurez noté l'importance du terme POSITIF. Essayez avec $-2 < 5$ et $-3 < -1$...

Il nous reste un dernier théorème pour la route que *vous démontrerez* également :

Théorème 3 - 8

Comparaison à 1
Soit a et b deux nombres réels avec $\boxed{b \neq 0}$.

- si a et b sont POSITIFS, $a < b \iff \frac{a}{b} < 1$;
- si a et b sont NÉGATIFS, $a < b \iff \frac{a}{b} > 1$

2 Intervalles

2 1 Définition

Mathémator : Nous avons déjà parlé des ensembles de nombres $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. Cependant, nous pouvons être amenés à parler d'une partie seulement d'un de ces ensembles.
Par exemple, quand il y a un nombre fini d'éléments, on utilise des accolades :

$$\left\{1, 2, 4, \sqrt{37}\right\}$$

est l'ensemble constitué des quatre nombres 1, 2, 4 et $\sqrt{37}$.
Cette façon de décrire un ensemble de nombres peut s'avérer inutilisable dans certains cas. Par exemple, peut-on donner la liste de TOUS les nombres réels entre -3 et 2 ?

Secondix: euh...

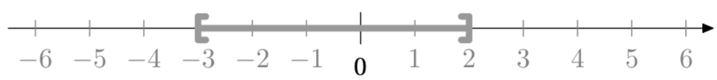
Mathémator : rappelez-vous qu'on ne peut même pas parler de *successeur* d'un réel. S'il existait un plus petit réel supérieur à -3, alors il suffirait de considérer le milieu de -3 et de ce nombre : il est réel et est plus petit que le soi-disant plus petit ce qui est impossible.

Secondix (à part): *qu'est-ce que c'est que ce délire ?* **(tout haut)** Si vous le dites...

Mathémator : comme on ne peut pas faire la liste de tous les nombres compris entre -3 et 2, on va reprendre l'image de la DROITE des réels.
Rappelez-vous : soit deux points distincts A et B d'une droite ; comment appelle-t-on l'ensemble des points de la droite situés entre A et B ?

Secondix: Ça je sais ! C'est le segment de droite [AB] : on le note avec des crochets.

Mathémator : Et bien on va utiliser la même notation avec les nombres mais au lieu de parler de *segment* $[-3; 2]$ on dira *intervalle* $[-3; 2]$.



Secondix: Ah oui : quand il y a une infinité de nombres, on utilise des crochets.

Mathémator : non : ce n'est pas si simple.

Secondix (à part): *Ça m'aurait étonné...* **(tout haut)** Ben pourtant dans $[-3; 2]$ il y a une infinité de nombres et dans $\left\{-3; 2\right\}$ il n'y a que les deux nombres -3 et 2 si j'ai bien compris.

Mathémator : vous avez bien compris mais on peut utiliser des accolades même avec une infinité de nombres. Plus troublant, on peut décrire l'intervalle $[-3; 2]$ à l'aide d'accolades...

$$[-3; 2] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

ce qui signifie : « l'intervalle $[-3; 2]$ est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $-3 \leqslant x \leqslant 2$ », c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels compris entre -3 et 2.

Secondix (à part): *Qu'est-ce que c'est que c't'embrouille* **(tout haut)** Bon ben c'est quoi alors un intervalle ? !

Mathémator : Je vais vous donner la définition officielle mais je vais d'abord vous en donner un petit truc qui est très pratique pour comprendre ce qu'est un intervalle (il faudra garder ça entre nous...)

Idée

Définition intuitive d'un intervalle
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de trou...

Secondix (à part): *C'est plutôt lui qui a un trou dans le cerveau* **(tout haut)** « qui n'a pas de trou » ? ?

Mathémator : Eh oui ! Par exemple l'ensemble $\{-3;2\}$ a un trou puisqu'il manque tous les nombres entre -3 et 2. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a aussi un trou puisqu'il manque 0. Voici la définition :

Définition 3 - 2

Intervalles de $\mathbb{R}$
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ d'un des 10 types suivants, les bornes a et b étant des réels.

1er cas : $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$, c'est-à-dire tous les nombres réels ;

2e cas : $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble vide ;

Autres cas : l'une des huit situations suivantes

	Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
Intervalles bornés	$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
	$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
	$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
	$]a;b[$	$a < x < b$	
Intervalles non bornés	$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
	$]-\infty;b[$	$x < b$	
	$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
	$]a;+\infty[$	$a < x$	

Rajoutons un peu de vocabulaire :

Définition 3 - 3

Vocabulaire

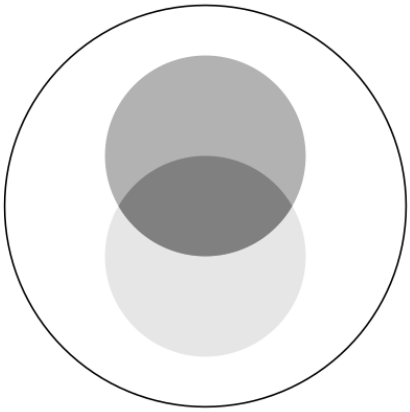
— $[a\,;b]$, $]a\,;b[$, $]a\,;b]$, et $[a\,;b[$ sont des **intervalles bornés** ;
— les réels a et b sont les **bornes** de l'intervalle ;
— $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle $[a\,;b]$;
— $\frac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle ;
— $[a\,;b]$ est un intervalle **fermé** ;
— $]a\,;b[$ est un intervalle **ouvert** ;
— $]a\,;b]$ est un intervalle **ouvert en a et fermé en b**.

2 2 Réunion et intersection

Mathémator : Ces différents types d'intervalles ne vont pas suffire pour décrire tous les ensembles de nombres que nous allons rencontrer cette année. Par exemple, on voudrait caractériser les nombres qui sont inférieurs à -3 ou supérieurs à 2.

Secondix: Ben c'est l'intervalle $]-\infty\,;-3]$ plus l'intervalle $[2\,;+\infty[$

Mathémator : C'est l'idée mais votre « plus » prête à confusion : qu'est-ce qu'on on additionne ? Les bornes ? Les éléments des intervalles ? Qu'est-ce qu'un addition d'intervalles ? Je vois bien ce que vous voulez dire mais vous n'êtes pas assez précis.
Faisons un petit voyage dans le temps et considérons votre classe de CP.
Il y avait Alain, Bernard, Corine, Daniel, Élisabeth, Monique, Robert, Henriette, Isabelle et Jacques. Parmi eux, seuls Bernard, Élisabeth, Henriette et Jacques portaient des lunettes.
Appelons G l'ensemble des garçons et L l'ensemble des enfants à lunettes.
Représentez la classe de CP en complétant les patates suivantes :



Quel est l'ensemble contenant les garçons et les enfants à lunettes ?

Secondix: C'est les élèves qui sont dans G ou dans L mais il n'a pas encore de nom.

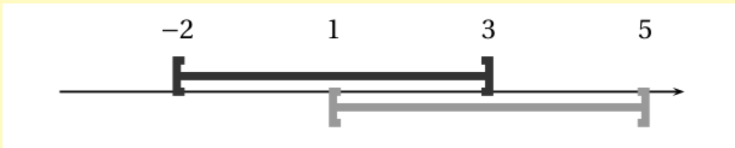
Mathémator : C'est cela. Nous allons lui en donner un officiel. On dira que c'est *la réunion* de G et L. On la notera $G \cup L$ et on lira « G union L ».
Pour les intervalles, c'est la même idée car il s'agit d'ensembles avant tout.

Définition 3 - 4

Réunion d'intervalle
La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **OU** à l'autre des deux intervalles.

Exemple

La réunion des intervalles $[-2\ ;3]$ et $[1;5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ OU $1 \leqslant x \leqslant 5$.
C'est l'ensemble des réels x tels que : $-2 \leqslant x \leqslant 5$ soit l'intervalle $[-2\ ;5]$.
Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée au moins une fois.



Maintenant, si l'on veut décrire l'ensemble des garçons à lunettes...

Secondix: c'est l'ensemble des enfants qui sont à la fois dans F et dans L. Je suppose qu'il va porter un nom spécial.

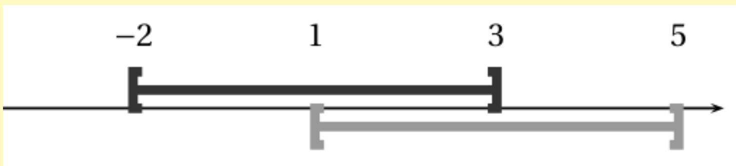
Mathémator : Oui ! On dira simplement que c'est *l'intersection* de G et L. On la notera $G \cap L$ et on lira « G inter L ».
Pour les intervalles, c'est encore la même idée.

Définition 3 - 5

Intersection d'intervalle
L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à l'un **ET** à l'autre des deux intervalles.

Exemple

L'intersection des intervalles $[-2\ ;3]$ et $[1;5]$ est l'ensemble des réels x qui vérifient : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ ET $1 \leqslant x \leqslant 5$.
C'est l'ensemble des réels x tels que : $1 \leqslant x \leqslant 3$ soit l'intervalle $[1\ ;3]$.
Graphiquement, cela correspond à la partie de la droite graduée qui est hachurée deux fois.



2 3 Première application : résolution d'inéquations linéaires

Mathémator : Nous allons à présent utiliser tout ce que nous venons de (re)voir pour résoudre une inéquation linéaire, c'est-à-dire où l'inconnue x intervient dans une expression du type ax.

Exemple

Inéquation linéaire
Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3(x-3) < 4$

Secondix: Ce n'est pas tout à fait le type d'expression annoncée...

Mathémator : Il ne faut pas se laisser tromper par les apparences ! $-3(x-3) = -3x + 9$: l'inconnue x n'est en fait que multipliée par un nombre constant.

Secondix: Bah, c'est toujours comme ça alors.

Mathémator : Une nouvelle fois vous parlez avant de réfléchir ! Par exemple, l'inéquation $3x^3 + \sqrt{x} + 3x + 2 < 4$ n'est pas linéaire en x car x est élevé au cube, on en prend la racine carrée : c'est beaucoup lpus compliqué à étudier...

Secondix: Et puis « résoudre dans $\mathbb{R}$ », ça veut dire quoi au juste ?

Mathémator : Résoudre une inéquation dans un ensemble, c'est trouver les nombres appartenant à cet ensemble qui vérifient l'inéquation, c'est-à-dire qui la rendent vraie quand on remplace l'inconnue par l'un d'entre eux.
À la fin d'une inéquation, il faudra donc donner un *ensemble de solutions*.

$$\begin{aligned} -3(x-3) &> 4 && \left(-\tfrac{1}{3}\right) \text{ qui est négatif} \\ x-3 &< -\frac{4}{3} && +3 \\ x &< -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est $S = \left]-\infty\,;\,-\frac{13}{3}\right[$
Occupons-nous à présent d'un cas un peu plus compliqué.

Recherche

Système d'inéquations linéaires à une inconnue

Résolvez dans $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} -2(t+1) \leqslant 5t-1 \\ 3\left(t+\dfrac{2}{3}\right) < t+6 \end{cases}$

Il s'agit de trouver les valeurs du réel t qui vérifient *à la fois* les deux inéquations. Occupez-vous de chacune séparément et nous regrouperons les résultats.

Secondix: Je suis prêt, Maître :

$$\begin{aligned} -2(t+1) &\leqslant 5t-1 \\ -2t-2 &\leqslant 5t-1 && +2 \\ -2t &\leqslant 5t+1 && -5t \\ -7t &\leqslant 1 && \left(-\tfrac{1}{7}\right) \\ t &\geqslant -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$S_1 = \left[-\frac{1}{7}\,;\,+\infty\right[$$

$$\begin{aligned} 3\left(t+\frac{2}{3}\right) &< t+8 \\ &< \\ &< \\ t & \end{aligned}$$

$$S_2 =$$

L'inconnue t doit donc être à la fois dans les deux ensembles : $S = S_1 \cap S_2 =$

3 Naissance de l'Algèbre : recherche personnelle

Voici notre héros :

Figure 3.1 – Al Khwarizmi (780 - 850)

أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمی

...ou si vous préférez Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.
Son livre le plus célèbre, qu'il a écrit entre 813 et 833 alors qu'il travaillait à *la maison de la sagesse* de Bagdad, se nomme :

الكتاب المختصر فی حساب الجبر والمقابلة

c'est-à-dire Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab ***al-jabr*** wa-l-muqabala
ou bien encore :

L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

— Pas de notations ni de nombres ! Tous les nombres et calculs sont décrits par des phrases :
— nombres (*dirham*) ;
— racines (*jidhr, ce qui est caché...*)
— choses (*shay* transposé en espagnol *Xay* qui a donné notre x)
— biens (« *mâl* » *en arabe*) carrés des racines.

Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture ». « Algebrista » est d'ailleurs entré dans la langue espagnole pour désigner un rebouteux.
L'al-jabr consiste à réduire l'équation en éliminant les soustractions par addition de termes dans les deux membres.
En effet, à l'époque d'Al-Khwarizmi, on ne travaillait qu'avec des entiers positifs.
Par exemple :

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

est transformé, par al-jabr, en

$$x^2 + 4x^2 = 40x$$

puis

$$5x^2 = 40x$$

En effet, Al-Khawarizmi nomme les termes soustraits (comme $4x^2$ dans l'exemple précédent) : nâqis, « terme enlevé ».
Le même mot est employé pour désigner le membre manquant d'un amputé.
Al-jabr consiste donc à restaurer ce qui est manquant dans une équation.
Al-muqabala signifie « confrontation ».

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

contient des carrés dans les deux membres, chaque membre est pourtant une somme.
Al-muqabala consiste donc à soustraire une quantité afin que des quantités de même type (dirham, racine ou carré) ne puissent se trouver à la fois dans les deux membres de l'équation. Dans

$$x^2 + 5 = 40x + 4x^2$$

on soustrait x^2 pour obtenir

$$5 = 40x + 3x^2$$

On retrouve alors un des six types d'équations qu'Al-Khwarizmi a étudié. Une méthode de résolution générale de chaque type était proposée ainsi qu'une démonstration, souvent géométrique. Voici un problème proposé par Al-Khwarizmi :

Un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams.

> *Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le bien, nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N). La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées -et c'est la moitié des dix racines- et sa largeur est comme le côté de la surface (AB). Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface. Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE). Tout cela vaudra soixante-quatre. Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine ; et le bien est neuf.*

Recherche

Faites un joli dessin et réfléchissez à la méthode proposée par Al.
Essayez ensuite avec $x^2 + 6x = 40$ puis avec $x^2 + 6x = -10$...

Nous venons de voir qu'Al-Khwarizmi n'utilisait pas de notations spéciales pour désigner les équations qu'il résolvait.
Il a fallu des siècles pour arriver au stade actuel.

- Diophante, IIIe siècle : $\Delta^{\Upsilon}\delta\ \zeta\gamma\ \epsilon\sigma\tau\iota\ \iota$
- Nicolas Chuquet, fin XVe siècle : 4^2 p 3^1 egault 10^0
- Tartaglia, début XVIe : 4q p 3R equale 10N
- Simon Stévin, fin XVIe : 4② +3① egales 10⓪
- François Viète, vers 1600 : 4 in A quad +3 in A æquatur 10
- René Descartes, vers 1640 : $4xx + 3x \propto 10$
- Guillaume Connan, vers 2018 : $4x^2 + 3x = 10$

Vous remarquez donc que les notations sont relativement récentes mais on sait résoudre des équations depuis des millénaires : il ne faut pas confondre mathématiques et notations ni litttérature et alphabet...

Exercices

Recherche 3 - 1

Comparer les nombres suivants en utilisant la méthode vue en cours :

1. $12x^2 + 7$ et $6x^2 + 5$;
2. $5x + 7$ et $-3 + 5x$;
3. $\frac{12}{7}$ et $\frac{7}{4}$;
4. $\frac{127}{57}$ et $\frac{48}{57}$;
5. $\frac{9,01}{10^{53}}$ et $\frac{90,11}{10^{54}}$;
6. $\frac{10^{35}}{10,01}$ et 10^{34} ;

Recherche 3 - 2

Soient x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x < y$. Comparer les nombres suivants en précisant à chaque étape la propriété utilisée :

1. $7x - 5$ et $7y - 5$;
2. $-5x + 4$ et $-5y$;
3. $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$;
4. $\frac{7}{x}$ et $\frac{7}{y}$;
5. $x^2 - 1$ et $y^2 - 1$;
6. $\frac{-3x}{13}$ et $\frac{-3y}{13}$;
7. $\frac{7x}{4} - 5$ et $\frac{7y}{4} + 1$;
8. $\frac{-15x}{7}$ et $\frac{-15y - 8}{7}$;

Recherche 3 - 3

Soit a un nombre positif. Le but de cet exercice est de comparer a, a^2 et a^3. Nous commencerons par observer quelques exemples avant de démontrer la règle générale.

1. Ordonner a, a^2 et a^3 pour les valeurs de a suivantes : $a_1 = 0,1$; $a_2 = 0,5$; $a_3 = 1$; $a_4 = 5$; $a_6 = 12$.
2. Les réponses sont-elles les mêmes pour toutes les valeurs précédentes ? Autour de quelle valeur de a y a-t-il un changement ?
3. On suppose $a > 1$. En utilisant un critère adapté, ordonner a et a^2, puis a^2 et a^3.
4. On suppose cette fois-ci $a < 1$. En utilisant un critère bien adapté, ordonner a et a^2, puis a^2 et a^3.
5. Que se passe-t-il pour $a = 1$? En déduire la règle générale sur l'ordre de a, a^2 et a^3.

Recherche 3 - 4

Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui définissent des intervalles de $\mathbb{R}$? Donner, quand cela est possible, la notation correspondante.

1. Tous les nombres réels strictement plus petits que 15.
2. Tous les entiers pairs.
3. Tous les nombres réels strictement compris entre -5 et 0.
4. Tous les nombres réels dont la valeur absolue vaut $5,2$.
5. Tous les nombres réels positifs ou nuls.
6. Tous les entiers compris entre $2,4$ inclus et $11,8$ exclus.
7. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $1,3$.
8. Tous les nombres réels dont la valeur absolue est supérieure ou égale à $1,3$.

Recherche 3 - 5

La vitesse de la lumière est de $2,99792458 10^8$ m.s^{-1}.
Lors d'une expérience, on a établi que le temps nécessaire à la lumière pour aller de la Terre à la Lune est de $1,285$s à $0,005$s près.

Donner un encadrement de la distance Terre-Lune.
NB : la précision de cette distance est de nos jours inférieure au mm, ce qui nous permet de savoir que la Lune s'éloigne de nous...

Recherche 3 - 6

On donne ci-dessous 8 inéquations :

- $-2 < x < 4$;
- $0 \leqslant x < 3,8$;
- $x > 0$;
- $x \geqslant -2,5$;
- $-3 \leqslant x \leqslant -0,5$;
- $x \geqslant -3$.

1. Donner l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par chaque inéquation.
2. Représenter graphiquement chacun des intervalles précédents.

Recherche 3 - 7

On considère les nombres réels suivants : 2 ; -2 ; 0 ; $-\frac{16}{3}$; 18 ; 7 ; $6,99$; $-2,1$; 1.

1. Lesquels de ces nombres sont inclus dans l'intervalle $[-2;7[$?
2. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]-\infty;-2]$?
3. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]0;7]$.

Recherche 3 - 8

On considère les nombres réels suivants : 2 ; -2 ; 0 ; $-\frac{16}{3}$; 18 ; 7 ; $6,99$; $-2,1$; 1.

1. Lesquels de ces nombres sont inclus dans l'intervalle $[-2;7[$?
2. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]-\infty;-2]$?
3. Lesquels sont inclus dans l'intervalle $]0;7]$.

Recherche 3 - 9

Trouver deux nombres décimaux appartenant à l'intervalle $[\frac{17}{3};\frac{18}{3}[$, puis deux autres dans l'intervalle $]-12,78;-12,77[$.

Recherche 3 - 10

Représenter graphiquement l'intersection des intervalles $[-2;5]$, $]-1,4;6]$ et $[-4;4[$. Donner ensuite sa notation en intervalle et l'égalité à laquelle il correspond.

Recherche 3 - 11

1. On donne les intervalles $I=]-3;3]$ et $J=]-\infty;1]$
   i. Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $-\pi$...........I $\sqrt{2}-1$...........J
   ii. Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur une droite graduée :
   iii. Déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$
2. On donne les intervalles $I=]-1;4[$ et $J=[-3;+\infty[$
   i. Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur une droite graduée :
   ii. Déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$

Recherche 3 - 12

Build a table which summerize the sign of the following expressions, showing the computations leading to the critical values and involving test values.

1. $2x-5$;
2. $-3x+4$;
3. $\frac{3}{7}x-2$;
4. $-2-12x$;
5. $7-\frac{2}{3}x$;
6. $-3+3x$.
7. $2+\sqrt{2}x$;
8. $-3x+7$.

Recherche 3 - 13

In this exercise we will extend the method of the signe table to products of linear expressions.

1. Give the signs of the expressions $3x-15$ and $-5x-7$ in a sign table.
2. Use the previous question to copy and fill the next table.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	5	$+\infty$
$3x-15$				
$-5x-7$				

3. Add a row to the new table where you will show the sign of the product $(3x-15)(-5x-7)$ over each interval.
4. Use the last row of the table to solve the inequations $(3x-15)(-5x-7)>0$ and $(3x-15)(-5x-7)\leq 0$.

Recherche 3 - 14

A dictator has bought 48 meters of fence to build a rectangular enclosure for his prime minister. Let x be the length of the smallest side of the enclosure and y the length of the longest side.

1. Prove that $y=24-x$.
2. Compute the area of the enclosure as a function of x.

The dictator wants the enclosure to have an area of at least 135 square meters. He wants to know what are the possible lengths for the sides to do so.

3. What inequation must we solve to answer to this problem ?
4. Check that this inequation is equivalent to $(x-15)(x-9)\leq 0$.

5. Solve this new inequation using a sign table.
6. Conclude.

Recherche 3 - 15

A company is building items in large quantities. Let x be the number of thousands of items built. Each item is sold at the price of £15 per unit. We call $S(x)$ the total of the sales, in thousand of euros.

1. i. Compute $S(1)$, $S(2)$ and $S(3)$.
   ii. Find the general formula for $S(x)$.
2. The cost of fabrication of x thousand of items has been proved to be close to $C(x) = 25x^2 - 85x + 75$.
   i. Prove that the balance of the company is equal to $B(x) = 25x^2 - 100x + 75$.
   ii. Prove that $B(x) = 25(x-1)(x-3)$.
   iii. What equation must we solve to find out for how many items the company will have a positive balance ?
   iv. Solve this equation using a sign table.