Bac STI élec - Juin 2007

Exercice 1

1. $\Delta = 4^2 - 4 \times 16 = -3 \times 16 = \left(4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

On obtient donc $x_1 = \frac{-4-4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-4+4\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

$$\mathscr{S} = \left\{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$$

2. a) $\mathrm{P}(4) = 4^3 - 64 = 0$

b) $\mathrm{P}(z) = (z-4)(\mathrm{a}z^2 + \mathrm{b}z + \mathrm{c}) = \mathrm{a}z^3 + (\mathrm{b}-4\mathrm{a})z^2 + (\mathrm{c}-4\mathrm{b})z - 4\mathrm{c} = z^3 - 64$

Par identification on obtient

$$\mathrm{a} = 1 \quad \mathrm{b} = 4 \quad \mathrm{c} = 16$$

Quelle surprise !

c) $\mathrm{P}(z) = (z-4)(z^2+4z+16) = 0 \iff z-4 = 0$ ou $z^2+4z+16 = 0$, donc

$$\mathscr{S} = \left\{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\,4\right\}$$

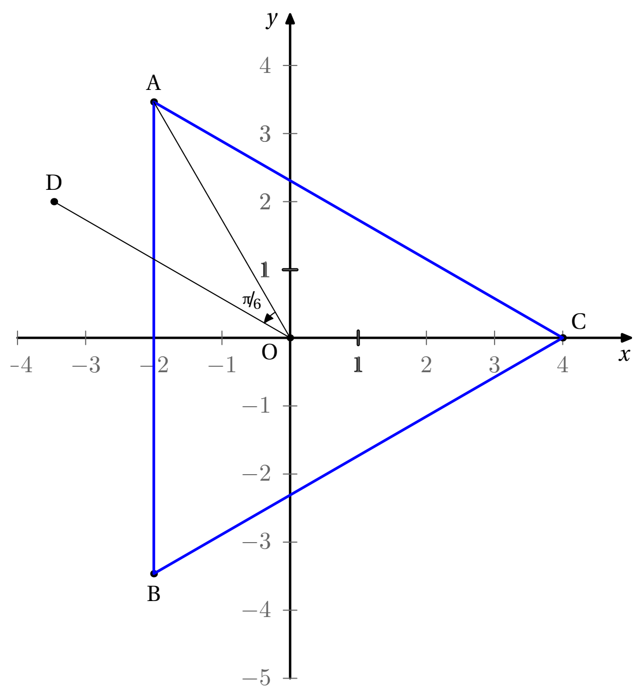
3. a) $|z_\mathrm{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ et $z_\mathrm{A} = 4\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Or $-\frac{1}{2} = \cos\left(2\pi/3\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(2\pi/3\right)$

donc $z_\mathrm{A} = 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Or $z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}$ donc $z_\mathrm{B} = 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$

b) La belle figure :



$\text{AB} = |z_b - z_\text{A}| = |-4\text{i}\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$
$\text{AC} = |z_\text{C} - z_\text{A}| = |6 - 2\text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{36 + 4 \times 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
$\text{BC} = |z_\text{C} - z_\text{B}| = |6 + 2\text{i}\sqrt{3}| = \sqrt{36 + 4 \times 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
Le triangle ABC est donc équilatéral.

4. a) $\text{Z}_\text{D} = z_\text{A}\text{e}^{\text{i}\pi/6} = 4\text{e}^{2\text{i}\pi/3} \times \text{e}^{\text{i}\pi/6} = 4\text{e}^{\text{i}\pi/6 + 2\text{i}\pi/3} = 4\text{e}^{5\text{i}\pi/6}$
Donc $|z_\text{D}| = 4$ et $\text{Arg}(z_\text{D}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $z_\text{D} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2\text{i}$

Exercice 2

1. $\text{AR}_1\text{R}_2\text{R}_3\text{R}_6\text{R}_7\text{B}$ ou $\text{AR}_1\text{R}_2\text{R}_4\text{R}_6\text{R}_7\text{B}$ ou $\text{AR}_1\text{R}_2\text{R}_5\text{R}_4\text{R}_6\text{R}_7\text{B}$
ou $\text{AR}_8\text{R}_9\text{R}_{14}\text{R}_{16}\text{R}_{17}\text{R}_{18}\text{B}$ ou $\text{AR}_8\text{R}_{10}\text{R}_{12}\text{R}_{14}\text{R}_{16}\text{R}_{17}\text{R}_{18}\text{B}$ ou $\text{AR}_8\text{R}_{11}\text{R}_{13}\text{R}_{15}\text{R}_{17}\text{R}_{18}\text{B}$

2. Il y a équiprobabilité des parcours, donc

a) $p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $p_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3. a) On regarde la longueur des bonds : 12s pour 2 parcours ou 14s pour 3 parcours ou 16s pour 1 parcours.

b) On en déduit le tableau suivant

x_i	12	14	16
$p(\text{X} = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

c) $\mathbb{E}(\text{X}) = 12 \times \dfrac{2}{6} + 14 \times \dfrac{3}{6} + 16 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{41}{3}$

4. Appelons x la durée d'un bond, alors dans ce cas $\mathbb{E}(\text{X}) = 6x \times \dfrac{2}{6} + 7x \times \dfrac{3}{6} + 8x \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{41x}{6}$
On cherche x tel que $\mathbb{E}(\text{X}) = 10 = \frac{41x}{6}$. On obtient $x = \frac{60}{41} \simeq 1{,}46$s

Exercice 3

Partie A

1. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $g(1) = 1 - 1 + 0 = 0$. On en déduit le tableau suivant

x	0		1		$+\infty$
Variations de $g(x)$	?	$\nearrow$	0	$\nearrow$	?
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. $f'(x) = a - \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

2. $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(1\,;0)$, donc $f(1) = 0 = a + b$.
En ce point la tangente est horizontale, donc de coefficient directeur nul. Or ce coefficient directeur vaut par définition $f'(1)$.
Ainsi $f'(1) = 0 = a - 1$.
On obtient donc $a = 1$ et $b = -1$.

Partie C

1. a) On obtient successivement

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}x-1=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$$

Donc $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ au voisinage de 0.

b) Cette fois $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$

2. a) D'après B.1. $f'(x)=a-\frac{1-\ln(x)}{x^2}=1-\frac{1-\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

b) On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Par lecture du tableau, on en déduit que 0 est le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ et donc que f est positive sur $]0\,;+\infty[$

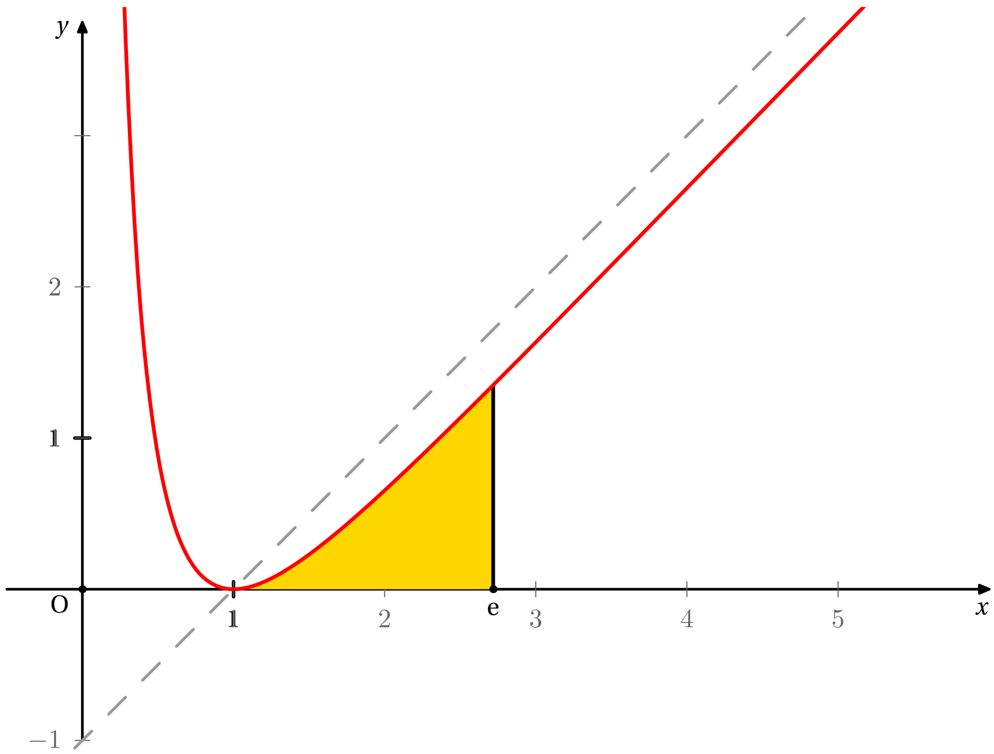
3. a) $f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x)}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=0$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet $\mathscr{D}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

b) $f(x)-(x-1)$ est du signe de $-\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty$ car x est positif.

Donc $f(x)-(x-1)$ est positif sur $]0\,;1]$ et négatif ailleurs, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $]0\,;1]$ et en-dessous ailleurs.

c) Voici le joli dessin



PartieD

1. a) $\mathrm{H}'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)$

b) On en déduit qu'une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est $\frac{1}{2}\mathrm{H}(x)$ et donc qu'une primitive de f sur cet intervalle est

$$\mathrm{F}\,:\,x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\big(\ln(x)\big)^2$$

2. a) Or $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F(e)} - \mathrm{F}(1) = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}$. Donc

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}\ \text{u.a.}$$

b) $\mathscr{A} = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}\right) \times 4\ \mathrm{cm}^2$ soit $\mathscr{A} \simeq 3{,}90\ \mathrm{mm}^2$.