QUATRIÈME LEÇON

LES COMPLEXES

Résumé Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors détaillons !

COURS

I - Pourquoi utilise-t-on les complexes ?

a. Pour résoudre des équations

Combien l'équation $x^3+px+q=0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXI$^{\text{ème}}$, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.

Considérons donc la fonction $f\ :\ x\mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe.

Maintenant, calculons la dérivée de f : $f'(x)=3x^2+p$. Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

- $\mathbf{p}\geqslant\mathbf{0}$: alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- $\mathbf{p}<\mathbf{0}$: alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$. On obtient donc le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.
On montre que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.

Alors $f(a) \cdot f(-a) =$
On peut enfin remarquer que $f(a) < f(-a)$ car
Entamons donc la discussion

- Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.

- Si

- Si

Résolvons ces équations

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.

Giralomo Cardano a établi[a] en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(\mathrm{E}_1)\ :\ x^3-36x-91=0$

On voudrait faire de même avec $(\mathrm{E}_2)\ :\ x^3-15x-4=0$. Un problème apparaît...

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$ et utilisons quand même la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce : calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$: faites-le !

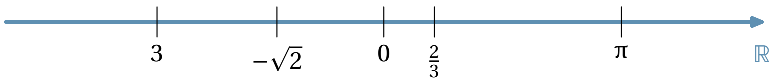
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIX[ème] siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Evariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

[a]Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x=u+v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v

b. Pour compter en dimension 2

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux[b], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
(Font) Font shape 'T1/futs/b/n' tried instead on input line 18. LaTeX Font Info : Font shape 'FMX/futm/m/n' will be Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés[c] :

- ⊳ L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- ⊳ La somme de 2 réels est encore un réel.
- ⊳ Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- ⊳ La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- ⊳ Le produit de deux réels est encore un réel.
- ⊳ Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- ⊳ La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2.

Téhessin : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessin : Ben pour l'addition, on fait $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessin : On a un élément neutre : (0,0) car $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$.

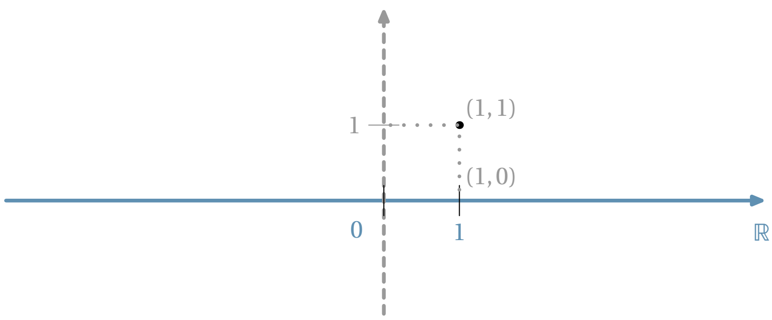
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessin : Et pour le symétrique, on prend $(-x,-y)$ car $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessin : Ça doit être pareil : $(x,y)\times(x',y')=(xx',yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x,y)\times(1,0)=(x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

Téhessin : Fichtre ! Essayons : $(x,y)\times(1,0)=(x\times 1-y\times 0,x\times 0+y\times 1)=(x,y)$. Ça marche.

[b] Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

[c] Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4ème et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Téhessin : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0,1)$ et élevez le au carré.

Téhessin : Allons-y : $(0,1)\times(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$, bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0,1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessin : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.
L'idée vient de l'observation *intuitive*[d] : « $(x, y) \curvearrowright x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1) \curvearrowright x\times 1+y\times\sqrt{-1} \curvearrowright x+y\sqrt{-1}$ »
Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x, y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessin : Si vous le dites : $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$, mais en plus simple.

Téhessin : Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$

Mathémator : N'oubliez pas que $i^2 = -1$

Téhessin : Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x, y)\times(x', y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

II - Vocabulaire et premières propriétés

Suite à la discussion de nos deux compères :

Théorème 1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- ▹ muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- ▹ contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- ▹ tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a+ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

[d] Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

a. Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathcal{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathcal{I}m(z)$

$\mathcal{I}m(z)$ est un nombre réel !

b. À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + $i\cdot$réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+i\cdot 0$.
Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 7x-32y+1=0 \end{cases}$$

c. Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

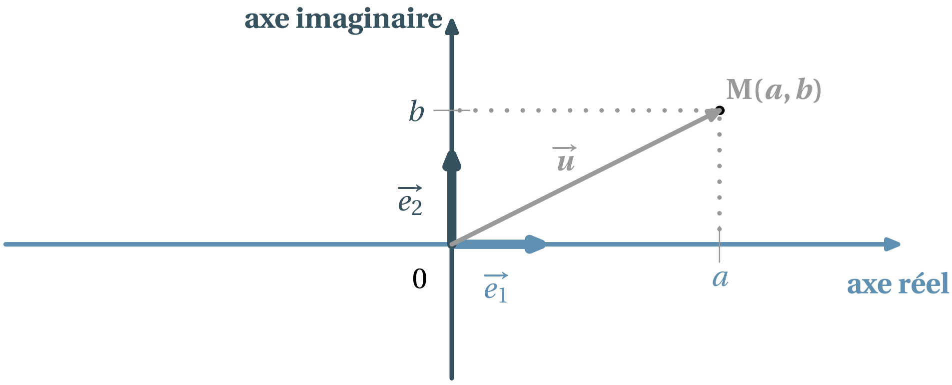


FIG. 1 –

À tout nombre complexe $z=a+ib$ on associe le point M de coordonnées (a,b) qu'on appelle **image** de complexe $z=a+ib$.
On le note souvent $\mathrm{M}(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a,b), on associe son **affixe** $z=a+ib$ qu'on note souvent z_{M}.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a,b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}}=a+ib$

d. Premiers calculs géométriques

▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a,b) et (a',b'), alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=(a+a')\overrightarrow{e_1}+(b+b')\overrightarrow{e_2}$, donc

$$\boxed{z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}=z_{\overrightarrow{u}}+z_{\overrightarrow{v}}}$$

▷ De même, si λ est un nombre réel

$$\boxed{z_{\lambda\overrightarrow{u}}=\lambda z_{\overrightarrow{u}}}$$

▷ Alors, si I est le **milieu** du segment $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$, on a

$$\boxed{z_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}(z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}})}$$

- Plus généralement, si G est le barycentre du système $\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n\alpha_n)\right\}$ alors

$$\boxed{z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \cdots \alpha_n z_{A_n}}{\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots \alpha_n}}$$

- Pour tous points A et B

$$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$$

e. Conjugué d'un complexe

Définition 1 Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne

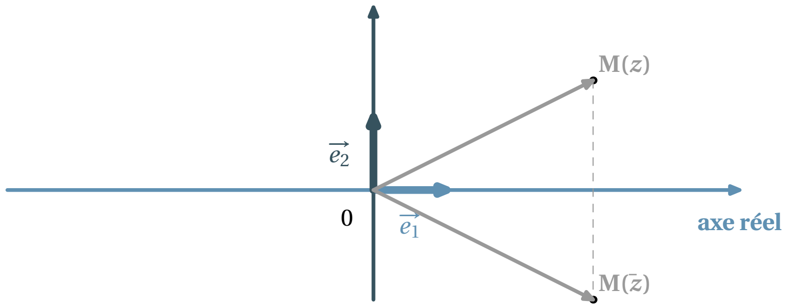


FIG. 2 –

Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes

Propriété1 Propriétés des conjugués

- M(z) et M′($\overline{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

f. À quoi servent les conjugués ?

À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel.

À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z\cdot\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$$

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2+i$,

$$\frac{1}{2+i}=\frac{1}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{2+i}{4+1}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

g. Module d'un nombre complexe

Définition 2 Module
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z|=\sqrt{z\,\overline{z}}$$

Quelques remarques

- ▹ Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z}=a^2+b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- ▹ Si a est un réel, $|a|=\sqrt{a\,\overline{a}}=\sqrt{aa}=\sqrt{a^2}$ car $\overline{a}=a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique

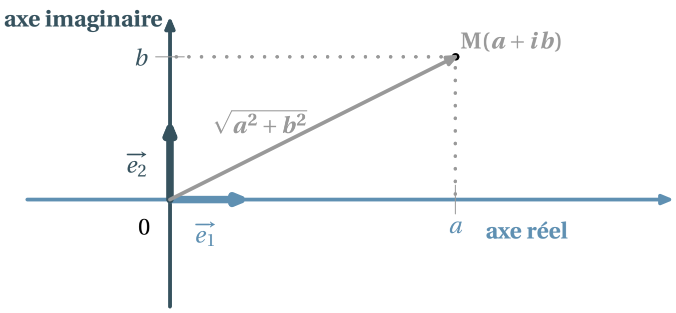


FIG. 3 –

Nous venons de voir que, si $z=a+ib$, alors

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2+b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou encore la longueur OM.

$$\boxed{|z_{\mathrm{M}}|=\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|=\mathrm{OM}\qquad\left|z_{\vec{u}}\right|=\|\vec{u}\|}$$

Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété2 Modules

- $\left|\overline{z}\right| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété3 Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Comme il s'agit d'une démonstartion classique, nous allons la détailler. Elle pourra servir à d'autres occasions.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathscr{R}e(z_1z_2) \leqslant 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

III - Résolution d'équations du second degré

a. Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

- $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions[e] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$
  On connait : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$
- $\boldsymbol{\alpha < 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm i\sqrt{-\alpha}$
  C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2i$ ou $z = 2i$

Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.
Cherchons les racines carrées de $4 + 3i$, à savoir les nombres $a + ib$ tels que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i$. Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.
Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$

[e] LA solution si $\alpha = 0$

b. Résolution de $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels

C'est comme en 1ère : $ax^2+bx+c=0 \iff a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \iff \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}$
Tout dépend donc du signe de b^2-4ac, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 2 Résolution de $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels
L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta=b^2-4ac$ le **discriminant** de l'équation

- ▷ Si $\Delta=0$, il existe une unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$
- ▷ Si $\Delta>0$, il existe deux solutions réelles $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- ▷ Si $\Delta<0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

IV - Forme trigonométrique

a. Argument d'un complexe non nul

Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires**. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).

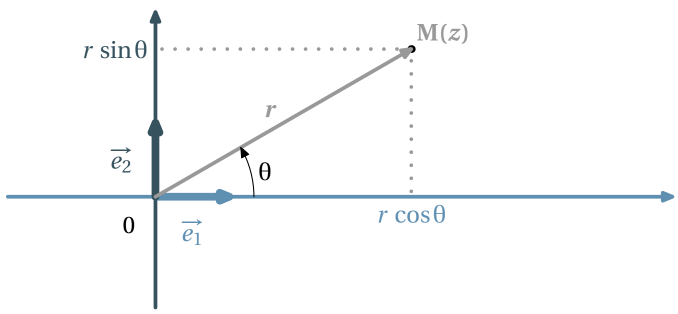


FIG. 4 –

Ainsi, (r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z, on a $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

$$\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

Congruence modulo 2π

Vous rencontrerez souvent[f] la notation $x\equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x-y$ est un multiple de 2π, c'est à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x-y=k\times 2\pi$. Retenons

$$\boxed{x\equiv y[2\pi] \iff \text{il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } x=y+2k\pi}$$

Par exemple, vous savez que $\dfrac{\pi}{3}\equiv\dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

[f] Cela doit titiller la mémoire des spécialistes

Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra

$$\boxed{\arg z \equiv \theta [2\pi]}$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32i \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part

$$\boxed{a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta}$$

et d'autre part

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Des formes trigonométriques de référence

- ▷ $1 = \cos 0 + i\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- ▷ $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- ▷ $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- ▷ $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

b. Correspondance forme algébrique / forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part

$$\boxed{a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta}$$

et d'autre part

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2+b^2}$ sera non nul également. Ainsi, nous pouvons écrire z sous la forme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a + \mathrm{i}b$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1, etc.
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide des touches [COS⁻¹]et [SIN⁻¹], ou encore avec [TAN⁻¹]. En effet, $\cos(\theta)$ étant non nul[g],

[g]Sinon, on sait qui est θ...

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a}$$

ce qui déterminera une valeur de l'argument modulo π.

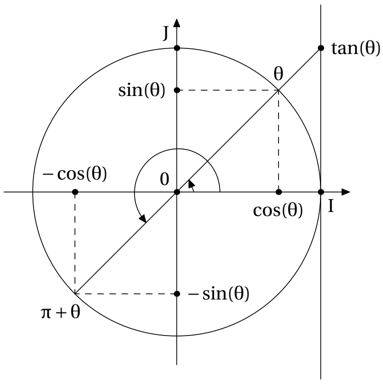


FIG. 5 – La tangente est déterminée à π près

Il suffira ensuite de considérer le signe de cos(θ) ou de sin(θ) pour savoir à qui on a affaire.

c. Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$, alors

$$zz' = rr'\left[\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta\right)'\right)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété4 Propriétés algébriques des arguments

- ▷ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- ▷ $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- ▷ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- ▷ $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème 3 Formule de Moivre

$$\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que

Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes

Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes

Mais revenons à nos premières amours : calculer en géométrie...

V - Les objets géométriques et les complexes

a. De l'objet au complexe

Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

$$\boxed{\mathrm{M}(z) \in \mathscr{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \Longleftrightarrow |z - z_\mathrm{A}| = \mathrm{R}}$$

Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc

$$\boxed{\text{ABC isocèle de sommet principal A} \Longleftrightarrow |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}| \Longleftrightarrow \left|\frac{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}\right| = 1}$$

Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$\boxed{|z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}|^2 = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|^2 + |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}|^2}$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{e_1}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right) + \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\right) = \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right)$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Longleftrightarrow \arg\left(\frac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]}$$

Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Petite révision de collège...

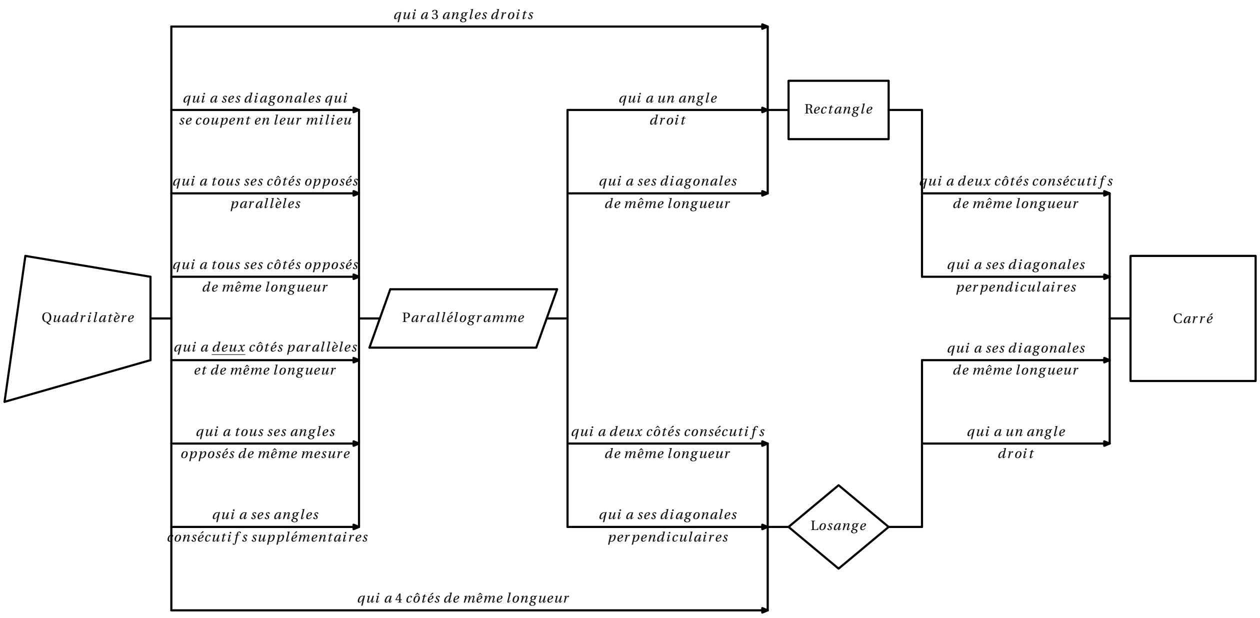


FIG. 6 –

qu'il vous suffira d'adapter connaissant ce qui précède.

b. Du complexe à l'objet

Que représente $z-32+5i$?

Soit A le point d'affixe $32-5i$ et M le point d'affixe z, alors $z-32+5i = z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}$

Comment interpréter $|z-32+5i|=3$?

D'après ce qui précède, on aboutit à AM = 3 : il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

Comment interpréter $|32+iz|=5$?

$|32+iz| = |i(-32i+z)| = |i| \times |z-32i| = |z-32i| = \mathrm{BM}$ avec M le point d'affixe z et B le point d'affixe $32i$. On retombe donc sur un cercle.

Comment interpréter $|z-a|=|z-b|$?

Soit M d'affixe z, A d'affixe a et B d'affixe b. Alors l'égalité se traduit par AM = BM, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

Que se cache-t-il derrière le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$?

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- ▷ $\arg(\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$
- ▷ $\left|\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = \lambda z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, donc

- ▷ si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et donc A, B et C sont alignés.
- ▷ si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = \pm|\lambda| i z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ et donc $\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)$ $[2\pi]$ c'est à dire (AC)⊥(AB)
- ▷ si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

Comment interpréter $(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) equiv \dfrac{\pi}{2} [\pi]$?

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

c. En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3+2i$, alors $-1 \times z = -3-2i$ et $i \times z = 3i + 2i^2 = -2+3i$. Notons M, M′ et M″ les points d'**affixes** respectives z, $-z$ et iz

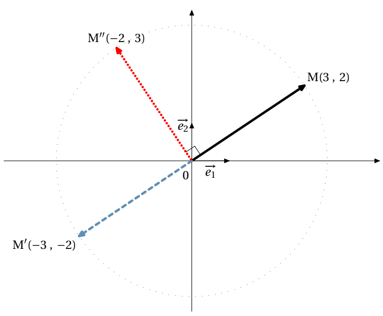


FIG. 7 –

Ô monde merveilleux ! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par -1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i, c'est à dire une multiplication par $i^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, $i.e.$ un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

VI - Complexes et électronique

a. Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante :

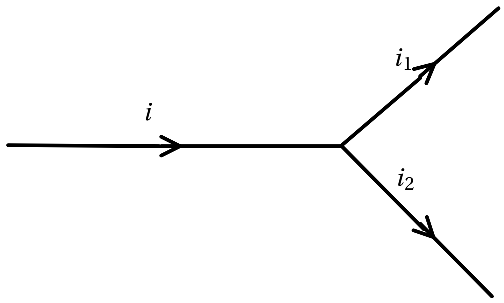


FIG. 8 – Loi des nœuds

Le courant initial i et les trois courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation ω.
Si $i_k = \widehat{\mathrm{I}_k}\sin(\omega t + \varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace[h] de i_k on a

$$\underline{\mathrm{I}_k} = \mathrm{I}_k\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$$

avec $\widehat{\mathrm{I}_k} = \sqrt{2}\mathrm{I}_k$

> En électronique, on note « j » le nombre de carré -1 pour ne pas le confondre avec le « i » de l'intensité...

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.
Il est temps à présent de se souvenir d'une petite formule de trigo :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

Vous pouvez alors montrer que, d'une part

$$i_1(t) + i_2(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2\right)\sin(\omega t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2\right)\cos(\omega t)$$

et d'autre part

$$i(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi\right)\sin(\omega t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi\right)\cos(\omega t)$$

puisque la relation $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\sin\varphi_2$$

(pourquoi ?) et en $t = \pi/_{2\omega}$ on obtient

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2\cos\varphi_2$$

Vous pouvez alors expliquer pourquoi

[h] Nous apprendrons à la calculer quand nous aurons étudié le calcul intégral

$$\boxed{\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}}$$

dans le cas de signaux de même pulsation. Cela va nous rendre de grands services, car il va être beaucoup plus simple d'additionner des complexes plutôt que des grandeurs sinusoïdales.

Exemple

Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \pi/_4\right)$ et $i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \pi/_6\right)$
Alors vous obtenez d'une part

$$\underline{I_1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(1+\mathrm{j}\right)$$

et d'autre part

$$\underline{I_2} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\mathrm{j}\right)$$

Nous en déduisons que

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{j}\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$$

On ne reconnais pas de lignes trigonométriques connues. Nous allons donc utiliser des valeurs approchées.

$$\underline{I} \approx 4,012289774 - 0,08578643763\mathrm{j}$$

Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ 4,01 Ampères et une mesure de son argument -0,021 radians, et donc

$$\boxed{i(t) \approx 4,01\sqrt{2}\sin(\omega t - 0,021)}$$

b. Impédance complexe

Vous verrez un jour que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \mathrm{R} + \mathrm{j}\mathrm{X}}$$

avec R la resistance et X la réactance du dipôle..

Cas d'une bobine parfaite

On considère la situation suivante :

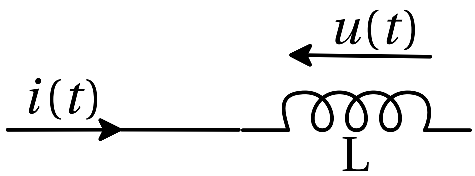


FIG. 9 – Bobine parfaite

Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. Or $i(t) = \mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$, donc

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi\right)\right)}{\mathrm{d}t} \\ &= \mathrm{LI}\sqrt{2}\omega\cos\left(\omega t + \varphi\right) \\ &= \mathrm{L}\omega\mathrm{I}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi + \pi/_2\right) \quad \text{car} \quad \sin\left(x + \pi/_2\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, d'une part

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}(\underline{Z}) &= \operatorname{Arg}(\underline{U}) - \operatorname{Arg}(\underline{I})\\ &= \varphi + \pi/2 - \varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}|\underline{Z}| &= |\underline{U}|/|\underline{I}|\\ &= \mathrm{IL}\omega/\mathrm{I}\\ &= \mathrm{L}\omega\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{j}\mathrm{L}\omega}$$

car je vous rappelle que $\cos(\pi/2) + \mathrm{j}\sin(\pi/2) = \mathrm{j}$

Montrez de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $1/jc\omega$ sachant que par définition $i(t) = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

EXERCICES

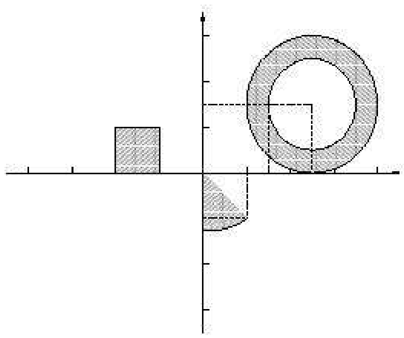
VII - exercices « originaux »

Exercice 1 Problème ouvert : calcul de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$

En utilisant les racines carrées de $1+i$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
Trouvez au moins deux autres méthodes de calcul en utilisant des formules trigonométriques.

Exercice 2 Du dessin aux formules

Caractérisez les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :

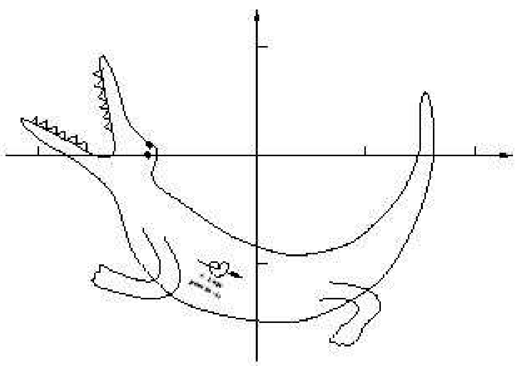


Exercice 3 Le crocodile se mord la queue...

...ou comment visualiser une multiplication complexe sur une pauvre bête ?

On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$



1. Écrivez les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

2. Dessinez une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

3. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placez aussi les images de quelques points particuliers du cercle.

4. « Dessinez l'image du crocodile ».

5. (plus facile) Dessinez de même l'image du croco par $z \mapsto z+1+2i$, $z \mapsto (\sqrt{3}+i)z$.

Exercice 4 Les fractales

Les fractales sont des objets irréguliers dont l'étude a débuté il y a une trentaine d'années. Elles interviennent dans de nombreux domaines : modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, description mathématique de la surface d'un nuage, étude des mécanismes financiers, infographie, c'est à dire création d'algorithmes efficaces pour représenter des objets sur un écran d'ordinateur (avec un minimum de données transmises).
Nous allons étudier deux fractales simples : le tamis et le tapis de Sierpinski.

Exercice 5 Dessin du tamis de Sierpinski

Considérons les trois transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\mathrm{T}_1(z) = \frac{1}{2}z \qquad \mathrm{T}_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \qquad \mathrm{T}_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Soit E_0 le triangle de sommets d'affixes 0, 1 et $1/2+i$.

1. Dessiner E_0.

2. Dessiner $\mathrm{E}_1 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_0)$

3. Dessiner $\mathrm{E}_2 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_1)$

$\vdots$

Si nous voulons transmettre ces dessins informatiquement, il est impossible de donner les coordonnées des sommets de tous les triangles noircis du tamis puisqu'il y en a une infinité. En fait, il suffit de donner E_0, T_1, T_2 et T_3 et le tour est joué. C'est ce qui est utilisé sur internet.
Un autre problème : quelle est la resistance électrique du tapis ?

Exercice 6 Dessin du tapis de Sierpinski

E_0 est le carré unité.

$$\mathrm{T}_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad \mathrm{T}_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} \qquad \mathrm{T}_3(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \qquad \mathrm{T}_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$\mathrm{T}_5(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \qquad \mathrm{T}_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i \qquad \mathrm{T}_7(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}i \qquad \mathrm{T}_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i$$

a. Géométrie, complexes, fonctions, électronique : qui dit mieux ?

Exercice 7 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M$'$ d'affixe $1/z$.
On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M$'$.

1. Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

2. Quelle est l'image de M′ par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.

3. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.

4. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

Exercice 8 Un peu d'électronique : étude d'un filtre

On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation ω, on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}} \quad \text{avec} \quad Z_1\omega) = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_2(\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$$

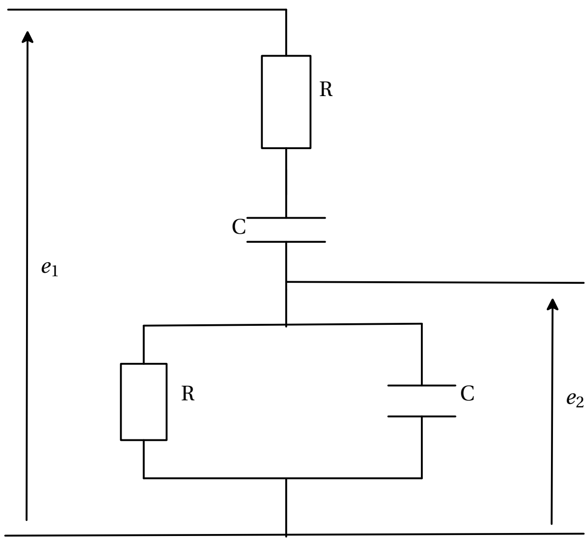


FIG. 10 – Filtre

Justifiez les valeurs trouvées de Z_1 et Z_2

Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $j^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i.

1. Montrez que $T(\omega) = \dfrac{1}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$

2. a) On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(\omega) = RC\omega - \frac{1}{RC\omega}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

b) On considère le point m d'affixe $3 + jh(\omega)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$?

c) Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $Z = T(\omega)$?

d) Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand ω parcourt $]0, +\infty[$.

e) Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm.
Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + j$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

VIII - Des exercices de Bac

Exercice 9 Équations - systèmes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{z+2}{z+2i} = i$

b) $2z + i\overline{z} = 5 - i$

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2iz + z' & = 2i \\ 3z - iz' & = 1 \end{cases}$

Exercice 10 Équations coeff complexes

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

2. Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :

$$(\mathrm{F}) : z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$

3. Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.

4. Résoudre l'équation (F).

Exercice 11 Équation de degré 4 - Interprétation géo.

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\mathrm{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.

4. a) Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$. Placer son image K.

b) En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. a) Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.

b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.

c) Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 12 Style Bac avec ROC

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On rappelle que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$, défini a $2k\pi$ près.

Dans cet exercice, *on prend comme prérequis* le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls ; **démontrer que** $\arg\dfrac{z}{z'} = \arg(z) - \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

On note A et B les points d'affixes respectives 2i et -1.

À tout nombre complexe z, distinct de 2i, on associe le nombre complexe $\mathrm{Z} = \dfrac{z+1}{z-2\mathrm{i}}$.

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z \neq -1$.

3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants

a) L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.

b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 13 Le QCM de la mort

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Vous avez 1 point par bonne réponse. J'enlève 0,5 point par réponse inexacte.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2i$. La forme algébrique de z est

○ $\dfrac{8}{3} - 2i$ ○ $-\dfrac{8}{3} - 2i$ ○ $\dfrac{8}{3} + 2i$ ○ $-\dfrac{8}{3} + 2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1| = |z+i|$ est la droite d'équation :

○ $y = x - 1$ ○ $y = -x$ ○ $y = -x + 1$ ○ $y = x$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $(1 + i\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si

○ $n \equiv 1[3]$ ○ $n \equiv 2[3]$ ○ $n \equiv 0[3]$ ○ $n \equiv 0[6]$

4. Soit l'équation $z = \dfrac{6-z}{3-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Une de ses solutions est

○ $-2 - \sqrt{2}i$ ○ $2 + \sqrt{2}i$ ○ $1 - i$ ○ $-1 - i$

5. Soit A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = i$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'affixe z_{C} du point de C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \pi/3$ est

○ $-i$ ○ $2i$ ○ $\sqrt{3} + i$ ○ $\sqrt{3} + 2i$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est

○ une droite ○ un cercle ○ une lemniscate de Bernoulli ○ une bergère syldave

Exercice 14 ROC is no dead

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthononnal direct $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Dans tout l'exercice, $\mathscr{P}\backslash\{\mathrm{O}\}$ désigne le plan $\mathscr{P}$ privé du point origine O.

1. Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

– Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ les points M et M′ $= f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{P}\backslash\{O\}$ tels que
$f(M) = M$.

c) M est un point du plan $\mathscr{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M′ est aussi distinct de O, U et V.
Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)}$.
En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\mathrm{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right)$

3. a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \mathrm{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 15 ROC et VRAI ou FAUX : un must

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres réels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{array}\right.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.

2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.

3. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.

4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 16 Une impression de Déjà-Vu

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ à 2π près.

Partie A. Restitution organisée de connaissances
Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Partie B
On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 3}{z + \mathrm{i}}$$

1. étude de quelques cas particuliers.
  a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB].
  Placer ces points sur le dessin.
  b) On note C le point d'affixe $c = -2 + \mathrm{i}$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.

2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
$\arg(z') = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.

3. Étude de deux ensembles de points.
  a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
  b) Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M′ ?

Exercice 17 Géométrie complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

4. a) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.
  b) Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.
  c) Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P′ par f.

5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

Exercice 18 QCM

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a) $|z-2+5\mathrm{i}|^2=3$;

b) $|z+2-5\mathrm{i}|^2=3$;

c) $|z-2+5\mathrm{i}|=3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a) M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

b) M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

c) M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_{G} son affixe.

a) $|z_{\mathrm{G}}-3-2,5\mathrm{i}|=\dfrac{5}{6}$;

b) $z_{\mathrm{G}}-(1+\mathrm{i})=\dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;

c) $z_{\mathrm{G}}-(3+2,5\mathrm{i})=\dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

Exercice 19 QCM : on aime !

Pour chacune des trois questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives
$-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2,08+1,98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle

(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. à tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z'=\dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle **(b)** : une droite

(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

Exercice 20 Un ROC sinon rien

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective $a,\ b,\ c$, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

II. Étude d'un cas particulier
On pose : $a = 3+\text{i},\ b = -1+3\text{i},\ c = -\sqrt{5}-\text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'aflixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et $a,\ b,\ c$ sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

1. On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b) Verifier l'égalité : $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.

c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.

a) Exprimer en fonction de $a,\ b$ et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.

b) Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 21 Une petite équation

On considère l'équation :

$$\text{(E)} \quad z^3 - (4+\text{i})z^2 + (13+4\text{i})z - 13\text{i} = 0$$

où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels $a,\ b$ et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+\text{i})z^2 + (13+4\text{i})z - 13\text{i} = (z-\text{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Formulaire de Trigonométrie

- **Formules**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, pour $a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, pour $a-b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$

- **Transformation de produits en somme**

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

- **Transformation de sommes en produits**

$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

$\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2})$

- **Formules de duplication**

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$

$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

Avec $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, on a :

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

.

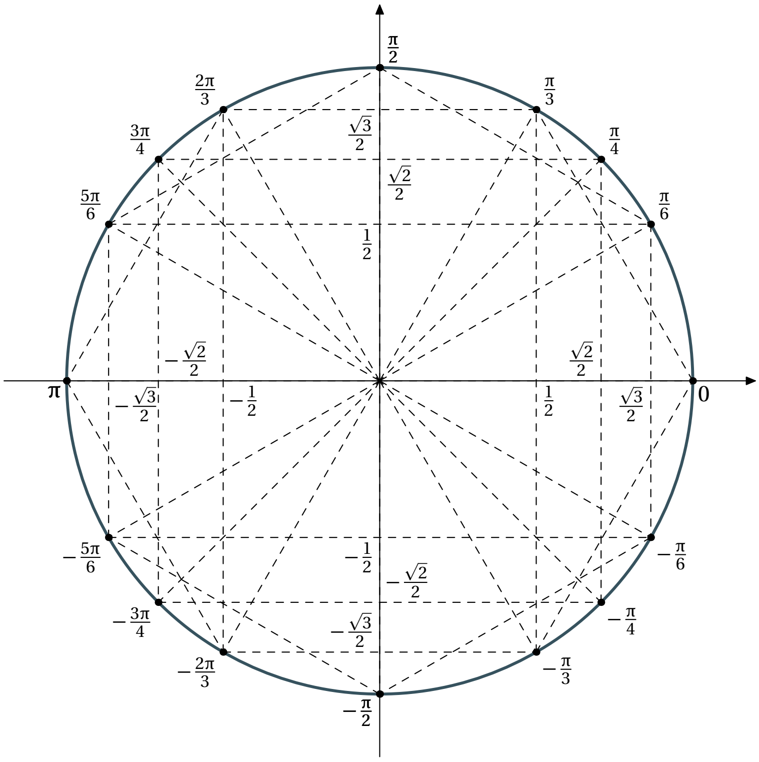


FIG. 11 –

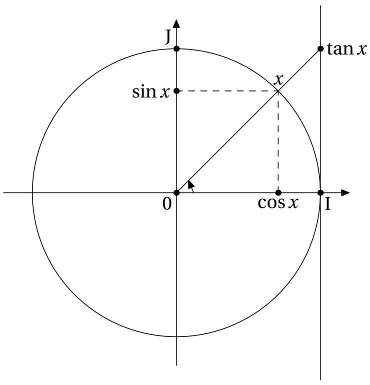


FIG. 12 –

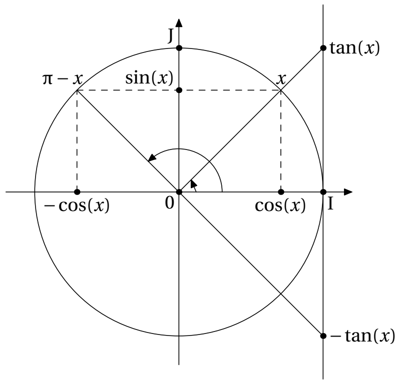


FIG. 13 –

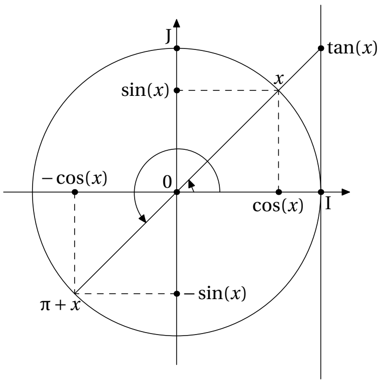


FIG. 14 –

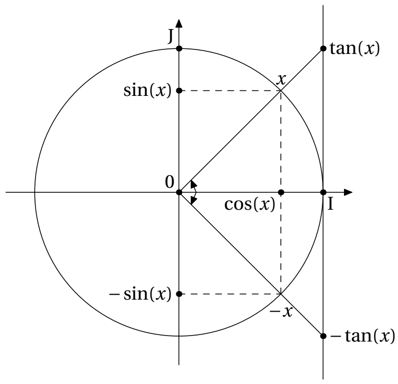


FIG. 15 –