Lycée Notre-Dame de Rezé

TERMINALE S3 1er Octobre 2018

Devoir Surveillé - CORRIGÉ

Durée : cent dix-huit minutes

Exercice 1. (*points)*
On veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A.

Il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$ on a $v_n \geqslant u_n$.

Soit $N_{max} = \max(N_0, N)$, alors :

$$n \geqslant N_{max} \Longrightarrow v_n \geqslant u_n \geqslant A$$

ce qui traduit bien que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ d'après la définition.

Exercice 2. (*points)*
$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$

a. Calculons la dérivée de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2 - 4x + 4$.
$\mathcal{T}$ admet pour équation réduite $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$ c'est-à-dire $y = -3(x-1) + 6 = -3x + 9$

b. **i.** $P(-4) = 64 - 32 - 28 - 4 = 0$.

ii. $(x+4)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx + 4ax^2 + 4bx + 4c = ax^3 + (b+4a)x^2 + (c+4b)x + 4c$.
On cherche a, b et c pour que $(x+4)(ax^2+bx+c) = P(x)$

Par identification on obtient $\begin{cases} a = -1 \\ b - 4 = -2 \Longrightarrow b = 2 \\ c + 8 = 7 \Longrightarrow c = -1 \end{cases}$

Finalement $P(x) = (x+4)(-x^2+2x-1)$

iii. Étudions l'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{T}$. On cherche donc à résoudre l'équation $(E) : f(x) = -3x + 9$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff -x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = -3x + 9 \\
(E) &\iff -x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0 \\
(E) &\iff P(x) = 0 \\
(E) &\iff (x+4)(-x^2+2x-1) = 0 \\
(E) &\iff -(x+4)(x^2-2x+1) = 0 \\
(E) &\iff -(x+4)(x-1)^2 = 0 \\
(E) &\iff x = -4 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}$ coupe donc $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, ce qui est normal, et au point d'abscisse -4.

Comme $f(x)-(-3x+9)=-(x+4)(x-1)^2$, $f(x)-(-3x+9)$ est du signe contraire de $x+4$ donc positif sur $]-\infty,-4]$ et négatif sur $[4,+\infty[$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente sur $]-\infty,4]$ puis reste au-dessus ailleurs.

Exercice 3. (*points)*
$\forall n\in\mathbb{N}, -1\leqslant \sin(n)\leqslant 1$ donc

$$4+3\times\frac{-1}{n^2}\leqslant u_n\leqslant 4+3\times\frac{1}{n^2}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ (limite de référence)

Donc par somme et produit de limites finies :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4+3\times\dfrac{-1}{n^2}=4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4+3\times\dfrac{1}{n^2}=4$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=4$$

$w_n=\dfrac{2n^2-n+1}{3n^2+2}=\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}$

Or les limites en $+\infty$ de $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ sont nulles comme limites de référence donc par somme et produit de limites finies on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{2}{n^2}=3$.

Ainsi par quotient de limites finies $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 4. (*points)*

a. $z_a=(2+i)^3=(2+i)^2(2+i)=(4+4i-1)(2+i)=(3+4i)(2+i)=6+3i+8i-4=2+11i$

b. $z_b=\dfrac{2+i}{1-2i}=\dfrac{2+i}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}=\dfrac{2+4i+i-2}{1+4}=i$

c. $z_c=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\times\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{1-2i\sqrt{3}-3}{1+3}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

d. $z_d=i(3-i)^2+\dfrac{1+2i}{2i}=i(9-6i-1)+\dfrac{1+2i}{2i}\times\dfrac{-i}{-i}=8i+6+\dfrac{-i+2}{2}=\dfrac{12+16i-i+2}{2}=\dfrac{14+15i}{2}$

Exercice 5. (*points)*

a. Traduisons l'énoncé :

$$\underbrace{d_{n+1}}_{\text{Distance jour suivant}}=\underbrace{1-\frac{1}{100}}_{\text{Baisse de 1\%}}\times\underbrace{d_n}_{\text{Distance jour } n}$$

On en déduit que (d_n) est une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme $d_1=50$.

b. On obtient donc que pour tout entier naturel non nul :

$$d_n=50\times 0,99^{n-1}$$

c. $L_n=d_1+d_2+\cdots+c_n=d_1\frac{1-0,99^n}{1-0,99}=50\frac{1-0,99^n}{0,01}=5000(1-0,99^n)$

d. Or pour tout entier naturel non nul n on a $0<1-0,99^n<1$ donc $L_n<5000$: il n'atteindra jamais son but :(

e. Pour un seuil donné, il faudra déterminer le plus petit entier n à partir duquel $5000-L_n\leqslant$ seuil. On cherche donc n tel que $5000-5000(1-0,99^n)\leqslant$ seuil i.e.

$$0.99^n\leqslant\frac{\text{seuil}}{5000}$$

On résout dans l'ordre $0,99^n \leqslant \frac{1}{50} = 0,02$ puis $0,99^n \leqslant \frac{1}{500} = 0,002$ puis $0,99^n \leqslant \frac{0,100}{5000} = 0,00002$
La suite de terme général $0,99^n$ étant strictement décroissante, la première valeur passant sous le seuil convient.
À la calculatrice on obtient :

— $0,99^{389} > 0,02$ et $0,99^{390} < 0,02$ donc il faut attendre 390 jours pour être à moins de 100 km du but.
— $0,99^{618} > 0,002$ et $0,99^{619} < 0,002$ donc il faut attendre 619 jours pour être à moins de 10 km du but.
— $0,99^{1076} > 0,00002$ et $0,99^{1077} < 0,00002$ donc il faut attendre 1077 jours pour être à moins de 100 m du but.

f.
```
Algorithme complété
Variable
    n : entier
    L, u, seuil : flottant
Début
    Afficher("valeur du seuil ?")
    Lire(seuil)
    n ← 1
    u ← 50
    L ← u
    TantQue 5000 - L > seuil Faire
        u ← u*0.99
        L ← L + u
        n ← n + 1
    FinTantQue
    Afficher(n)
Fin
```

— On initialise n à 1, u à u_1 et L à u_1 : c'est la situation du premier jour.
Tant que L est à plus de seuil de 5000, on fait évoluer les variables :
  — u valait u_n et vaut maintenant $0,99u_n = u_{n+1}$
  — On rajoute la nouvelle distance à L qui vaut maintenant L_{n+1}
  — On incrémente n de 1

En sortant de la boucle, on vient juste de dépasser le seuil et on affiche la valeur de n qui correspond.