$\mathrm{T}^{\mathrm{ale}}\mathrm{S}_6$ Devoir surveillé de mathématiques n°1

Mardi 4 octobre 2005

L'usage des calculatrices est autorisé - L'usage de la copie du (de la) voisin(e) est vivement déconseillé

Exercice 1

Pour chacune des dix affirmations (entre guillemets) ci -dessous, précisez si elle est vraie ou fausse en donnant soit une démonstration, soit un contre-exemple.

1) « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\ ;\ +\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. »
2) Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, g ne s'annulant pas :
« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
3) « Si $f$est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ »
4) On considère un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
« Si f est définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$».
5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.
   a) « Si f est périodique, alors f' est périodique».
   b) « Si f' est périodique, alors f est périodique».
   c) « Si f est paire, alors f' est impaire».
   d) « Si f est impaire, alors f' est paire».
   e) « Si f' est impaire, alors f est paire».
   f) « Si f' est paire, alors f est impaire».

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 18$
   a) Déterminez les réels α, β et γ tels que $g(x) = (x-3)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$.
   b) Déduisez-en le signe de g sur $\mathbb{R}$
2) Démontrez qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$$

3) Déterminez les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
4) Montrez que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]1, +\infty[$. Déduisez-en le sens de variation de f sur $]1, +\infty[$. Dressez le tableau de variation de f.
5) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Démontrez que $(\mathcal{C})$ possède une asymptote oblique Δ et étudiez la position relative de $(\mathcal{C})$ et Δ.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $[-1{,}1]$ par

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

1) Étudiez la dérivabilité de f en -1 et $+1$. Déduisez-en les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses respectives -1 et $+1$.
2) Dressez le tableau de variation de f; vous préciserez $f(0)$.
3) Justifiez que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
   Déterminez β et donnez une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de α.