# Devoir surveillé de mathématiques n°1 - T$^{\text{ale}}$S4 - Jeudi 1$^{\text{er}}$ octobre 2009 - 2 heures

## Exercice 1 ROC

*Prérequis : la définition et les propriétés relatives aux conjugués et le module d'un nombre complexe $z$ quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.*

Démontrer que :

- pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe $z$ non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

## Exercice 2 ROC

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

– Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif

– Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul d'affixe $z$ on a : $\arg(z) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif

1. Soit $z$ et $z'$ des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif.
2. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a$, $b$, $c$, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif.

## Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $\dfrac{z+2}{z+2i} = i$
   b) $2z + i\overline{z} = 5 - i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} 2iz + z' &= 2i \\ 3z - iz' &= 1 \end{cases}$

## Exercice 4 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si $z$ est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$ et $|z|$ désigne le module de $z$.

1. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, alors $z^4$ est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

## Exercice 5 Géométrie complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit $f$ l'application qui à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z' = \frac{4}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de $z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application $f$ est le point $J$ d'affixe 1.
3. Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul. Démontrer que le point $A$ d'affixe $\alpha$ admet un antécédent unique par $f$, dont on précisera l'affixe.
4. a) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

   b) Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si $r$ désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par $f$ du cercle de centre $O$ et de rayon $r$.

   c) Choisir un point $P$ du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP = 3$, et construire géométriquement son image $P'$ par $f$.
5. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre $J$ et de rayon 1. Montrer que l'image par $f$ de tout point de $\mathcal{C}_1$ ,distinct de $O$, appartient à la droite $D$ d'équation $x = 2$.