$\mathrm{T^{ale}S_6}$ Devoir surveillé de mathématiques n°2

Mardi 8 novembre 2005

L'usage des calculatrices et de la copie du (de la) voisin(e) n'est pas autorisé.

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Vous indiquerez sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a alors :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A} : & z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\mathrm{i}. & \mathrm{C} : & z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}. \\ \mathrm{B} : & z^{14} = 64 - 64\mathrm{i}. & \mathrm{D} : & z^{14} = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3} \end{array}$$

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4\mathrm{i}|$.
A : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
B : (E) est la droite (ST) ;
C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4\mathrm{i}$, et de rayon 3 ;
D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3) Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.
B : Γ n'admet pas d'asymptote.
C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.
D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

4) Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A} : & |z-2+5\mathrm{i}|^2 = 3 & \mathrm{C} : & |z+2-5\mathrm{i}|^2 = 3 \\ \mathrm{B} : & |z-2+5\mathrm{i}| = 3 & \mathrm{D} : & |z-2+5\mathrm{i}| = \sqrt{3} \end{array}$$

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1) Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2) Déterminer les nombres réels a, b, c tels que :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}$.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$.

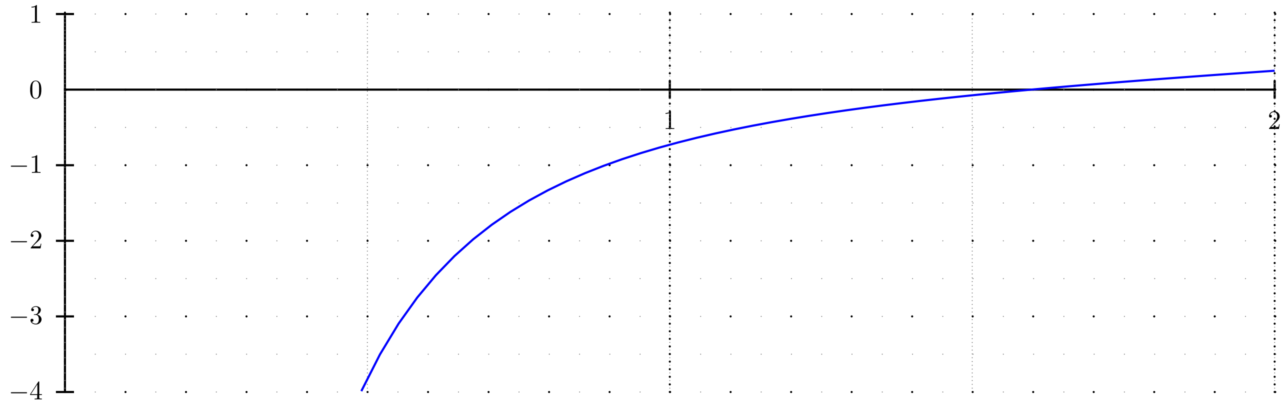
1) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

2) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon.

Exercice 3

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,2]$.
On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observez ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f, sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur I ?
Á l'aide de ce graphique donnez un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.
Donnez UNE allure possible du graphe de f.

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $I = [0, \pi/2]$ par

$$g(x) = 2x\cos(2x) - \sin(2x) + \frac{\pi}{2}$$

1) Calculez $g'(x)$.
2) Étudiez le signe de $g'(x)$ sur I.
3) Dressez le tableau des variations de g sur I.
4) Déduisez-en qu'il existe un unique réel a solution de l'équation $g(x) = 0$. Vous en donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.