T$^{\text{ale}}$S$_6$ Corrigé DS n°2

Mardi 8 novembre 2005

Exercice 1

1) $|z^{14}| = |z|^{14} = 2^7 = 128$ et $\text{Arg}(z^{14}) = 14\,\text{Arg}(z) \equiv \dfrac{(12+2)\pi}{3}[2\pi] = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $z = 128\left(-\frac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc réponse C.
2) $|z-3| = |3-4i| \iff |z_M - z_S| = |z_S - z_T| \iff SM = ST$ donc M est situé à la distance fixe ST du point fixe S. C'est donc un cercle de centre S et de rayon $|3-4i| = 5$: réponse D.
3) On sent que $g(x)$ ressemble à $\sqrt{x^2}/x = -x/x = -1$ en $-\infty$ donc réponse A.
4) On a $AM^2 = |z - z_A|^2 = 3$ or $z_A = -2+5i$, donc réponse C.

Exercice 2

I

1) Il suffit de calculer $P(-i)$ et ça marche.
2) $(z+i)(z^2+bz+c) = z^3 + (b+i)z^2 + (c+ib)z + ci$ donc $a = 1$, $b = -8$ et $c = 17$
3) Résolvons $z^2 - 8z + 17 = 0$. $\Delta = 64 - 68 = -4 = (2i)^2$, donc

$$S = \{-i, 4+i, 4-i\}$$

II

1) $a' = 4 - i$, $b' = 4+3i$ et $c' = -4+3i$
2) Il faut vérifier que $|a'-p| = |b'-p| = |c'-p|$ On obtient $|4-i-i| = |4+3i-i| = |-4+3i-i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Exercice 3

On remarque que f' s'annule en changeant de signe en a, avec $a \simeq 1{,}6$ donc admet un extremum. Plus précisément

x	0		a		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Donc f admet bien un minimum en a.

Exercice 4

1) $g'(x) = 2\cos(2x) - 2x \times 2 \times \sin(2x) - 2 \times \cos(2x) = -4x\sin(2x)$
2) $0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \iff 0 \leqslant 2x \leqslant \pi$, or sin est positive sur $[0,\pi]$, donc $g'(x)$ est négative sur I.
3) et 4) Par lecture du tableau de variation, on obtient que $g(x) = 0$ admet une unique solution sur I

x	0		a		$\pi/2$
$f(x)$	$\pi/2$	↘	0	↘	$-\pi/2$