SGM1 Corrigé DS n°1

Jeudi 10 novembre 2005

9 novembre 2005

Exercice 1

La fréquence du son fondamental d'une corde vibrante est donnée par la formule

$$N = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

où ℓ est la longueur de la corde, F sa tension et μ sa masse par unité de longueur.
Donnez l'expression de l'erreur relative $\left|\frac{\mathrm{d}N}{N}\right|_{\max}$ en fonction des erreurs $\mathrm{d}\ell$, $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}\mu$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{N} &= \mathrm{d}(\ln N) = \mathrm{d}(-\ln 2 - \ln \ell + \frac{1}{2}\ln F - \frac{1}{2}\ln \mu)\\ &= -\mathrm{d}(\ln \ell) + \frac{1}{2}\mathrm{d}(\ln F) - \frac{1}{2}\mathrm{d}(\ln \mu)\\ &= -\frac{\mathrm{d}\ell}{\ell} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F}{F} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\frac{\mathrm{d}N}{N}\right|_{\max} = \left|\frac{\mathrm{d}\ell}{\ell}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}F}{F}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\right|$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Calculez $f(1)$.
   $f(1) = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$
2) Calculez la dérivée de f sur $]0,+\infty[$.
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$
3) Simplifiez alors l'écriture de $f(x)$.
   On en déduit que f est constante sur $]0,+\infty[$ et donc que $f(x) = f(1) = \pi/2$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

1) Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
   $f(x) = \sqrt{x^2\dfrac{1}{1-2/x}} = x\sqrt{\dfrac{1}{1-2/x}}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont vous déterminerez une équation.

$\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{1-2/x}}$ d'après ce qui précède, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Ensuite, pour trouver « b »

$$f(x) - 1 \times x = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-2/x}} - 1\right) = x\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}\right)$$

Il reste à utiliser la quantité conjuguée

$$f(x) - x = \frac{2x}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)} \backsim \frac{2x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)} = \frac{2x}{2x} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 1$ et $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = x+1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$

Exercice 4

En probabilités, la distribution normale est caractérisée par la fonction de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-u^2} \qquad \text{où} \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

la moyenne μ et l'écart-type σ étant considérés comme des constantes positives.
Calculez la dérivée de f et montrez qu'elle est du signe de $-x+\mu$ puis dressez son tableau de variation sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times (-2uu') \times e^{-u^2} \\ &= \frac{-2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-u^2} \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ est du signe contraire de $(x-\mu)$. On obtient donc le tableau suivant

x	$-\infty$		μ		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$1/\sigma\sqrt{2\pi}$	$\searrow$	

Exercice 5

1) Démontrez que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

On pose $f(x) = e^x$, alors $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ qui admet pour limite $f'(0) = e^0 = 1$ en 0, car l'exponentielle est dérivable en 0.

2) On considère un circuit électrique constitué d'une force électromotrice U, d'une résistance R et d'une inductance L. L'intensité du courant I varie alors en fonction du temps t selon la formule

$$I(R) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

On considère comme des constantes U, L et t et comme seule variable R.
Calculez $\lim\limits_{R\to 0} I(R)$.

$$I(R) = \frac{U}{R}\left(-\frac{e^{-Rt/L}-1}{-Rt/L} \times (-Rt/L)\right) = \frac{Ut}{L}\left(\frac{e^{-RT/L}-1}{-Rt/L}\right)$$

Or $\lim\limits_{R\to 0} fre^{-RT/L} - 1 - Rt/L = 1$ d'après le 1), donc $\lim\limits_{R\to 0} I(R) = \dfrac{Ut}{L}$

Exercice 6

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$

1) Calulez $P(-2)$ et déduisez-en une première factorisation de $P(z)$.
   $P(-2) = 0$, donc $P(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$. On obtient par identification $a = -4$ et $b = 8$, donc
   $$P(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 8)$$

2) Résolvez alors l'équation $P(z) = 0$.
   Il reste à résoudre $z^2 - 4z + 8 = 0$. $\Delta = -16 = (4j)^2$, donc
   $$S = \{-2, 2 - 2j, 2 + 2j\}$$

3) On pose $z_0 = -2(-1+j)$, $z_1 = -2$ et $z_2 = 2 + 2j$. Écrivez ces trois nombres sous forme exponentielle.
   $|z_0| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ et $z_0 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{(-1)}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$
   z_2 étant le conjugué de z_0, on obtient $z_2 = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$
   $z_1 = -2 = 2 \times (-1) = 2e^{j\pi}$