DEVOIR COMMUN

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 3 pages numérotées de 1 à 3.

EXERCICE 1 (3 points)

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

1. Étudiez le sens de variation de la suite (I_n).

2. Montrez que, pour tout x de $[0;1]$, on a :

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{2}$$

En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

3. Montrer qu'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, $h - g$ est solution de (E$'$).

4. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la fonction f solution de (E) qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en 0.

Partie B :
On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».
L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\mathrm{E}}$.
La probabilité d'un évènement E sera notée $\mathbb{P}(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Quel nombre minimal n de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B
L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :
- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\mathbb{E}(X)$.
   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathbb{E}(X) < 0$.
   Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
   Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B
Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
2. a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array}\right.$$

   b) Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array}\right.$ équivaut à
   $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.
3. a) Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
   On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?