T^{ale} S 5 Devoir de mathématiques 20 mars 2008

Exercice 1

1. Dans un repère orthonormé d'unité 10cm, construisez la droite (D) d'équation $y = -x+1$ et la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{2}{9x}$.

2. Hachurez la partie du plan $\mathscr{E} = \{x \in [0,1],\ y \in [0,1] \mid x+y \leqslant 1 \text{ et } xy \leqslant 2/9\}$.

3. Déterminez les coordonnées des points d'intersection de (D) et (C).

4. Montrez que l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$ vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}\ln 2$ *u.a.*

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a) Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x)$$

sur $[1\ ;\ +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1\ ;\ +\infty[$.

c) Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

$$\mathscr{V} = \int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b) Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

Exercice 3

1. À l'aide de majorations ou d'encadrements, déterminez la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

2. On pose $\mathrm{I}(t) = \displaystyle\int_0^t x\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x$ où p est un paramètre réel. Calculez $\mathrm{I}(t)$ puis $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{I}(t)$ en discutant selon les valeurs du paramètre p.