2$^{\text{nde}}$13 Devoir surveillé de mathématiques n°1 : CORRIGÉ

Jeudi 5 octobre 2006 - Durée : 2 heures

Exercice 1 Un peu d'ordre

Nous considèrerons connus les résultats suivants :

Définition *Soient a et b deux nombres réels quelconques.*
Nous dirons que a est ***supérieur à*** *b lorsque la différence $a - b$ est positive. On notera alors*

$$a \geqslant b$$

Théorème 1 *Soit a et b deux réels vérifiant $a \geqslant b$. Soit c un réel quelconque. Alors on a toujours*

$$a+c \geqslant b+c$$

Théorème 2 *On peut multiplier par un même nombre réel …… les deux membres d'une inégalité sans en changer le sens.*

Théorème 3 *Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre ……, alors l'inégalité change de sens.*

a. Complétez les …… des théorèmes 2 et 3 pour qu'ils soient corrects.

Théorème 2 On peut multiplier par un même nombre réel POSITIF les deux membres d'une inégalité sans en changer le sens.

Théorème 3 Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre NÉGATIF, alors l'inégalité change de sens.

b. Reformulez le théorème 1 sous forme d'une phrase en langage courant, sur le modèle des énoncés des théorèmes 2 et 3.

On peut additionner un même nombre aux deux membres d'une inégalité sans en changer le sens.

c. Résolvez les inéquations suivantes. Vous **justifierez** chaque calcul en citant la définition ou le théorème que vous utilisez.

i)
$$\begin{aligned}
-3x+5 &\geqslant -37 \\
-3x+5-5 &\geqslant -37-5 \qquad d'après\ le\ th.1 \\
-3x &\geqslant -42 \\
\frac{-3x}{-3} &\leqslant \frac{-42}{-3} \qquad d'après\ le\ th3 \\
x &\leqslant 14
\end{aligned}$$

$S =]-\infty\,; 14]$

ii)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x-3 &\leqslant 5x \\
\frac{1}{2}x-3+3 &\leqslant 5x+3 \qquad d'après\ le\ th.1 \\
\frac{1}{2}x &\leqslant 5x+3 \\
\frac{1}{2}x-5x &\leqslant 5x+3-5x \qquad d'après\ le\ th.1 \\
-\frac{9}{2}x &\leqslant 3 \\
-\frac{9}{2}x\times\frac{-2}{9} &\geqslant 3\times\frac{-2}{9} \qquad d'après\ le\ th3 \\
x &\geqslant -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$S = [-\frac{2}{3}\,; +\infty[$

d. On voudrait savoir si on peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens ? Vous commencerez par donner des exemples qui illustrent cette proposition.

$$\begin{aligned} 2 &\leqslant 3 \\ -3 &\leqslant 5 \\ -1 = 2-3 &\leqslant 3-5 = -2 \end{aligned}$$

Vous tenterez ensuite de la démontrer dans le cas général.

Supposons que $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$. Cela signifie que $a-b$ et $c-d$ sont positifs d'après la définition. Or si on additionne deux nombres positifs, le résultat est positif. Ainsi, on obtient successivement

$$\begin{aligned} (a-b)+(c-d) &\geqslant 0 \\ a-b+c-d &\geqslant 0 \\ (a+c)-(b+d) &\geqslant 0 \\ a+c &\geqslant b+d \qquad \text{d'après la définition} \end{aligned}$$

Exercice 2

On donne : $t = (\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})$ $\quad u = \frac{1}{2}+\frac{7}{5}\times\frac{3}{4}$ $\quad v = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{2-\frac{1}{6}}$

a. Calculer t, u et v et donner les résultats sous la forme la plus simple possible.

$t = (\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 2-7 = -5$

$u = \frac{1}{2}+\frac{7}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\frac{7\times 3}{5\times 4} = \frac{1}{2}+\frac{21}{20} = \frac{10}{20}+\frac{21}{20} = \frac{31}{20}$

$v = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{2-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}+\frac{3}{3}\,\frac{12}{6}-\frac{1}{6} = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{5}{3}\times\frac{6}{11} = \frac{5\times 6}{3\times 11} = \frac{10}{11}$

b. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des symboles $\in$ (appartient) et $\notin$ (n'appa rtient pas) :

Ensembles	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
t	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
u	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
v	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$

Exercice 3

a. Le nombre 1,555 est-il un nombre rationnel ? Justifier.

Oui ! $1{,}555 = \frac{1555}{1000} = \frac{1555}{10^3}$

b. Existe-t-il des nombres décimaux qui ne soient pas rationnels ? Justifier.

Non ! $d \in \mathbb{D} \iff d = \frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$, donc d s'écrit comme le quotient de deux entiers : c'est toujours un rationnel.

c. Existe-t-il des nombres rationnels qui ne soient pas décimaux ? Justifier.

Oui ! $1/3 \in \mathbb{Q}$ mais $1/3 = 0{,}3\overline{3}$, donc n'est pas un décimal.

Exercice 4

a. Écrire sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$x = 5^2\times 5^9\times 10^{-2} = 5^{2+9}\times(5\times 2)^{-2} = 5^{11}\times 5^{-2}\times 2^{-2} = 5^9\times 2^{-2}$

$y = \frac{(-1)^3\times 2^3\times\left(3\times 2^3\right)^2}{\left(3^3\right)^3\times\left(2^{3\times(-2)}\right)} = \frac{-2^3\times 3^2\times 2^{3\times 2}}{3^{3\times 3}\times 2^{-6}} = \frac{-2^3\times 3^2\times 2^6}{3^9\times 2^{-6}} = -2^{3+6-(-6)}\times 3^{2-9} = -2^{15}\times 3^{-7}$

b. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}+c$, avec $a,\ b,\ c$ des entiers et b étant le plus petit possible :

$$\begin{aligned}M &= \sqrt{288}-\sqrt{162}=\sqrt{3\times3\times2\times2\times2\times2\times2}-\sqrt{3\times3\times3\times3\times2}=\sqrt{3^2\times4^2\times2}-\sqrt{9^2\times2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}-\sqrt{9^2}\times\sqrt{2}\\ &= 3\times4\times\sqrt{2}-9\sqrt{2}=(12-9)\sqrt{2}=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$P=(3\sqrt{5}-2)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2-2\times3\sqrt{5}\times2+2^2=9\times5-12\sqrt{5}+4=45-12\sqrt{5}+4=-12\sqrt{5}+49$$

Exercice 5

Complétez avec l'un des symboles suivants : <, >, =. (Aucune justification n'est demandée)

$\frac{15}{11}<\frac{19}{11}$ $\qquad$ $\frac{-5}{24}>\frac{-7}{24}$

$\frac{15}{11}>\frac{15}{13}$ $\qquad$ $\frac{-15}{21}=\frac{-3\times5}{3\times7}=\frac{-25}{35}=\frac{-5\times5}{5\times7}=\frac{5}{7}$

$\frac{\pi}{3}>1>0{,}99$ $\qquad$ $\frac{3}{\sqrt{10}-1}=\frac{3\left(\sqrt{10}+1\right)}{\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{10}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{10}+1\right)}{\left(\sqrt{10}^2-1^2\right)}=\frac{3\left(\sqrt{10}+1\right)}{(10-1)}=\frac{3\left(\sqrt{10}+1\right)}{9}=\frac{\sqrt{10}+1}{3}$

Exercice 6

Quel calcul effectue-t-on si on tape sur la calculatrice :

[√] [(] [5] [+] [4] [)] [×] [3] [÷] [5] [+] [6]

Donnez le résultat.

$\sqrt{5+4}\times\frac{3}{5}+6=\sqrt{9}\times\frac{3}{5}+6=3\times\frac{3}{5}+6=\frac{9}{5}+\frac{30}{5}=\frac{39}{5}$

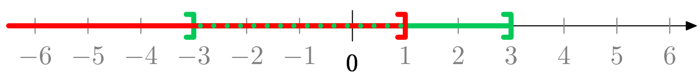
Exercice 7

a. On donne les intervalles $I=]-3;3]$ et $J=]-\infty;1]$

i) Compléter avec $\in$ ou $\notin$: $\qquad -\pi\simeq-3{,}1\notin I \qquad \sqrt{2}-1\simeq0{,}4\in J$

ii) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :

$J=]-\infty\,;1]$ $\qquad$ $I=]-3\,;3]$

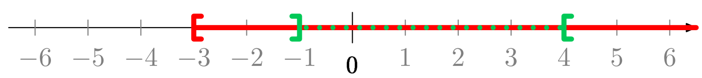


iii) Déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$ $I\cap J=]-3\,;1]$ $I\cup J=]-\infty\,;3]$

b. On donne les intervalles $I=]-1;4[$ et $J=[-3;+\infty[$

i) Dessiner en vert l'intervalle I et en rouge l'intervalle J sur la droite graduée :

$I=]-1\,;4[$ $\qquad$ $J=[-3\,;+\infty[$



ii) Déterminer $I\cap J$ et $I\cup J$ $I\cap J=I$ $I\cup J=J$

QUESTION BONUS (FACULTATIVE)

De quelle fraction irréductible $0,123\overline{123}$ est-il le développement décimal ? Expliquez votre méthode.

Posons $x=0,123\overline{123}$. Alors $100x=123,123\overline{123}$ et $100x-x=99x=123$, d'où $x=\frac{123}{99}$