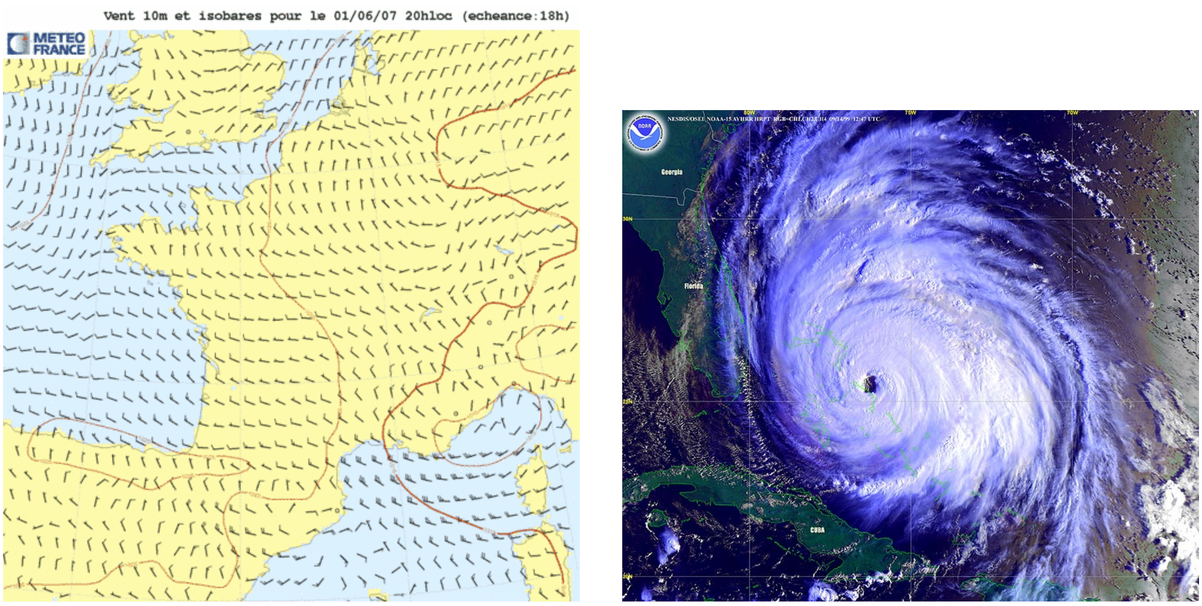
TD 1. Ce TD se base sur le sujet Amerique du Nord juin 2006
Fichier global pour tout le td `td-equa-diff-Euler.xws`
On utilisera le logiciel Xcas que l'on peut se procurer à l'adresse :
`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Champ de vecteurs

Définition 1. Un *champ de vecteur* est la donnée en tout point M, d'un domaine D du plan, d'un vecteur $\overrightarrow{E(M)}$ du plan dépendant du point M.

Exemple 1.

La physique regorge de champs de vecteurs : le champ électrique provoqué par une charge, le champ de gravitation, en météorologie la carte des vents fait apparaitre le champ du vent (figure 1)



(a) Champ des vitesses du vent

(b) Une petite brise marine !

FIG. 1: Champ du vent

Exemple 2.
Prenons un exemple simple. On considère que le domaine D est la surface d'un fluide en mouvement (une rivière…), chaque particule possède, à un instant donné, un vecteur vitesse qui dépend de sa position.

Définition 2. Si $\vec{E}$ est un champ de vecteur dans un domaine D du plan, *une ligne de champ* est une courbe tracée dans D, tangente en tout point M au vecteur $\overrightarrow{E(M)}$ et parcourue dans le sens du champ.

En reprenant l'exemple précédent, une ligne de champ s'obtient de la façon suivante : vous lachez une feuille au dessus de la rivière, la trajectoire que suit la feuille est une ligne de champ du champ des vitesses des particules de la rivière.
(Fichier `champ-vecteurs.xws`) [1]

[1] Sans aucune rigueur, on passe allègrement des champs de vecteurs aux champs de tangentes, en terminale le problème n'est pas là !

1. Ouvrer Xcas dans le menu `Graph` (en haut à droite) puis `interactive_odeplot` écrivez `interactive_odeplot(0,[x,y])` dans la ligne de commande puis validez (entrée).

   Vous voyez un champ de vecteur de pente nulle (un bel écoulement sans perturbation dans la rivière !), cliquez à la souris (c'est la feuille que vous lachez) sur la fenêtre graphique `DispG` pour visualiser une ligne de champ passant par ce point (c'est c'est la trajectoire de votre feuille). Dans la ligne de commande suivante écrivez `erase()` pour effacer l'écran `DispG`.
2. Amusons nous avec un autre exemple : traçons le champ de vecteur $\vec{v}(x\ ;\ y) = (-y\ ;\ x)$, essayer de deviner son allure (on pourra faire un petit croquis où l'on tracera $\vec{u}(x\ ;\ y) = (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}$. Pour vérifier on rentre `interactive_odeplot([-y,x],[x,y])`.
3. Encore un dernier exemple : `interactive_odeplot(y,[x,y])`, vous avez à l'écran un champ un champ de tangentes dont la pente, en chaque point, à l'ordonnée de ce point, dans l'écran cliquez à la souris sur le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$. Expliquez la courbe que vous obtenez (et que vous connaissez bien).

2. Équation différentielle, approche graphique

On rappelle qu'une équation différentielle est une relation entre une fonction f et ses dérivées f', f",...

Exemple 3.
$u'(x) = u(x)$ est une équation différentielle du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première. Donner les solutions de cette équation différentielle, puis celle qui vérifie $u(0) = 1$.
On entre pour vérifier : `desolve([y'-y=0,y(0)=1],y)`

Maintenant faisons le lien entre les équations différentielles et les champs de tangentes.

Retour à l'exercice du bac Amérique du Nord 2006

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : \ f(0) = 0 \end{cases}$$

Notons $M(x\ ;\ y)$ un point de la courbe d'une solution f de (1). On a $y = f(x)$ et aussi $f'(x) = 4 - (f(x))^2 = 4 - (y)^2$. Puisque la tangente en M au graphe de f à pour pente $f'(x)$ on en déduit : en tout point $(x\ ;\ y)$ du graphe d'une solution, la tangente a pour pente $4 - (y)^2$.
Voici comment on peut deviner l'allure des solutions. En tout point $M(x\ ;\ y)$ du domaine D on dessine un petit segment centré en M de pente $4 - (y)^2$. On obtient un champ de direction. Par définition, une solution de l'équation différentielle (1) est une fonction dont le graphe est tangent en tout point aux segments ainsi dessinés.
Dans Xcas écrivez `interactive_odeplot(4-y^2,[x,y])` puis dans la fenêtre `DispG` cliquez la souris sur l'origine, vous voyez apparaître la solution de notre problème.

Partie A. Approche numérique, méthode d'Euler

On rappelle le principe de la méthode d'Euler.
On sait que la solution passe par l'origine $O = M_0$ (d'après (2)).
On connaît la direction de la tangente en n'importe quel point (on vient d'expliquer pourquoi).

1. Donner l'équation de la tangente T_0 en M_0.
2. On choisit un pas h, et on considère que si l'on « avance » de h alors la courbe $\mathcal{C}_f$ de la solution et T_0 sont « presque confondues ». On trace donc la tangente T_0 sur l'intervalle $[0\ ;\ h]$ et l'extrémité de ce segment de tangente est noté $M_1(x_1\ ;\ y_1)$.

   Exprimez x_1 et y_1 en fonction de x_0, y_0 et h.

3. Puis on réitère le processus. On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n, justifier que l'on a, en prenant pour le pas $h = 0{,}2$, :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

4. Dans cette question on utilisera le tableur d'Xcas (fichier `bac-amerique-nord2006-partieA.xws`) : `Edit-> Ajouter-> Tableur`
Une fenêtre s'ouvre demandant le nombre de lignes : 10 suffiront, de colonnes 4, on cliquera dans la case `Graph` puisque l'on aura besoin d'un dessin.
   (a) Les coordonnées des points sont à consigner dans le tableau de l'annexe.
   Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
   La colonne A contiendra les valeurs de x_n, à partir de 0, avec un pas égal à 0,2.
   La colonne B contiendra les valeurs correspondantes de y_n.
   Justifier que dans la cellule
   (b) Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
   Avec Xcas dans le menu du tableur `Statistiques->2d->Ligne polygonale` selectionner la plage de cellules `A0 :B7` et pour cellule cible (ou l'on écrit la formule) C0 par exemple, ou ce qui revient au même : on tapera dans la cellule C0 `=polygonplot(matrix(8,2,(A0) :(B7)))`
   (c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

5. (a) Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2+x+0,8$. Montrer que si $x \in [0\ ;\ 2]$ alors $p(x) \in [0\ ;\ 2]$.
   On pourra vérifier graphiquement en traçant la courbe de p sur $[0\ ;\ 2]$ à l'aide de la commande `funcplot` où l'on précisera l'intervalle de la façon suivante : `x=0..2`.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
   (c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).
   (d) La suite (y_n) est-elle convergente ?
   Pour vérifier graphiquement toutes les assertions sur la suite (y_n) on utilisera la commande `plotseq(p(x),y_0,nombre de termes)`

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}\right)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
On vérifiera avec Xcas en utilisant les commandes `fonction_derivee(g)` où g a été définie comme une fonction (et pas une expression) et `simplify` qui comme son nom l'indique…
2. (a) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   On vérifiera avec Xcas en utilisant la commande `limite(g(x),x,valeur)`
   (b) Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ à l'origine.
Pour vérifier avec Xcas, on ouvre un niveau de géométrie `Edit -> Ajouter -> geo2d`. On trace Δ, $\mathcal{C}_g$, la tangente T_0, on définit le point I intersection de la tangente et de l'asymptote.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe $(\mathcal{C}_g)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

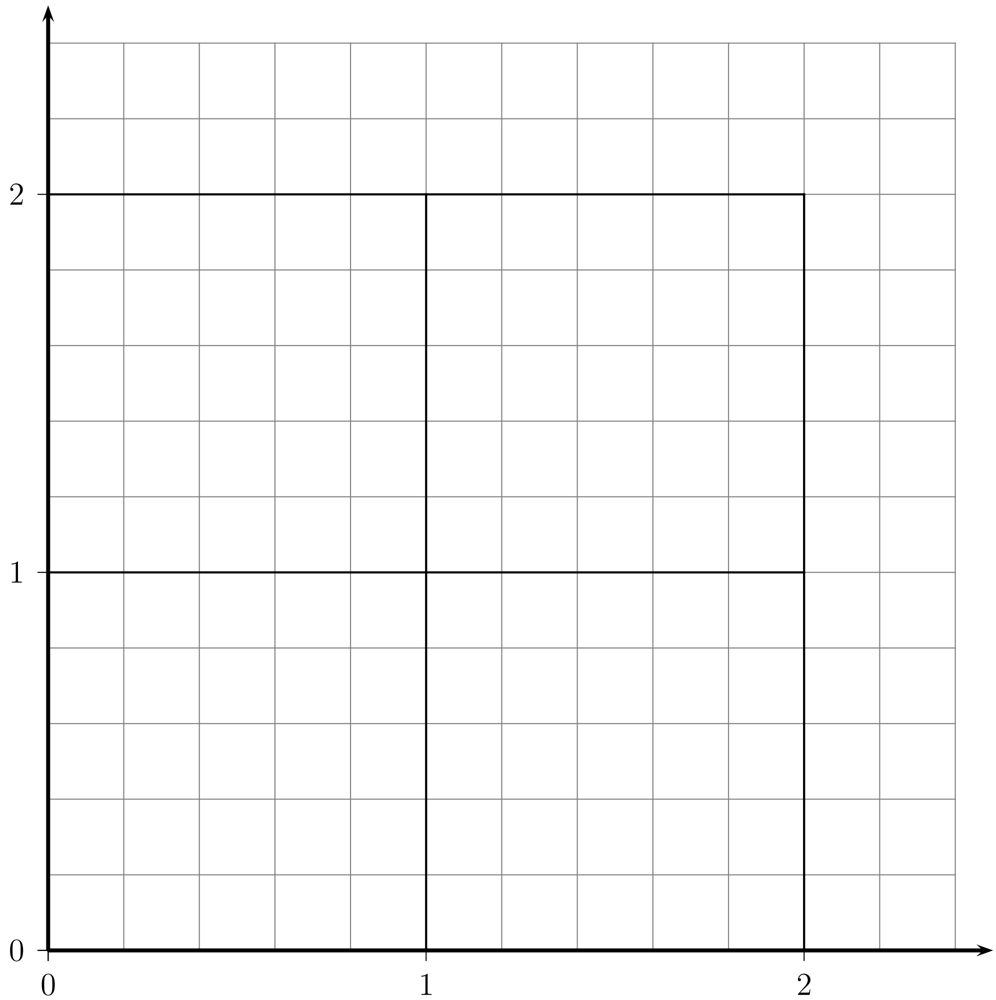
Cette page sera complétée et remise avec la copie avant la fin de l'épreuve

Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2						
y_n	0							

Partie B



Solution 1. La session Xcas

1 `interactive_odeplot(0,[x,y])`

End interactive_plotode
Evaluation time : 3.48

voir figure 2

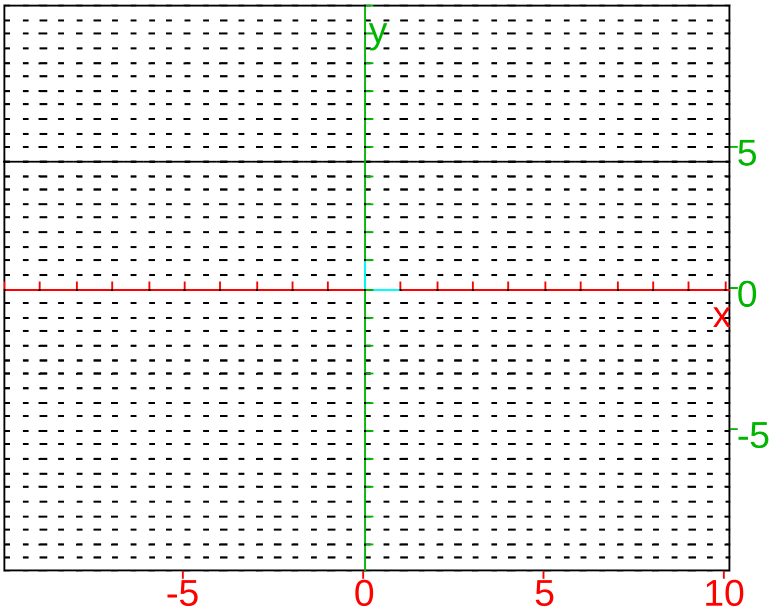


Fig. 2: interactive_odeplot(0,[x,y])

2 `erase()`

$$\mathrm{expr}(\mathrm{erase},0) \tag{1}$$

3 `interactive_odeplot([-y,x],[x,y])`

End interactive_plotode
Evaluation time : 3.86

voir figure 3

4 `erase()`

$$\mathrm{expr}(\mathrm{erase},0) \tag{2}$$

5 `interactive_odeplot(y,[x,y])`

End interactive_plotode
Evaluation time : 5.83

voir figure 4

6 `desolve([y'-y=0,y(0)=1],y)`

$$[1/(e^{-x})] \tag{3}$$

7 `interactive_odeplot(4-y^2,[x,y])`

End interactive_plotode
Evaluation time : 2.35

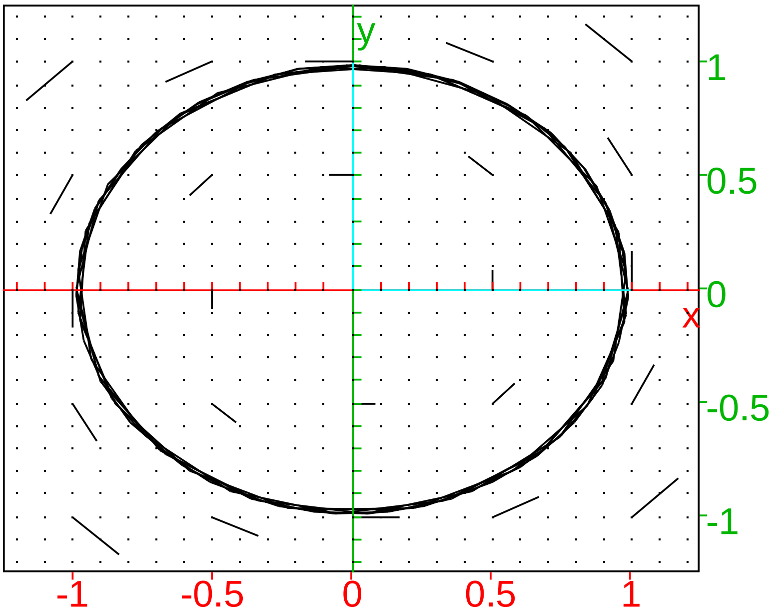


FIG. 3: interactive_odeplot([-y,x],[x,y])

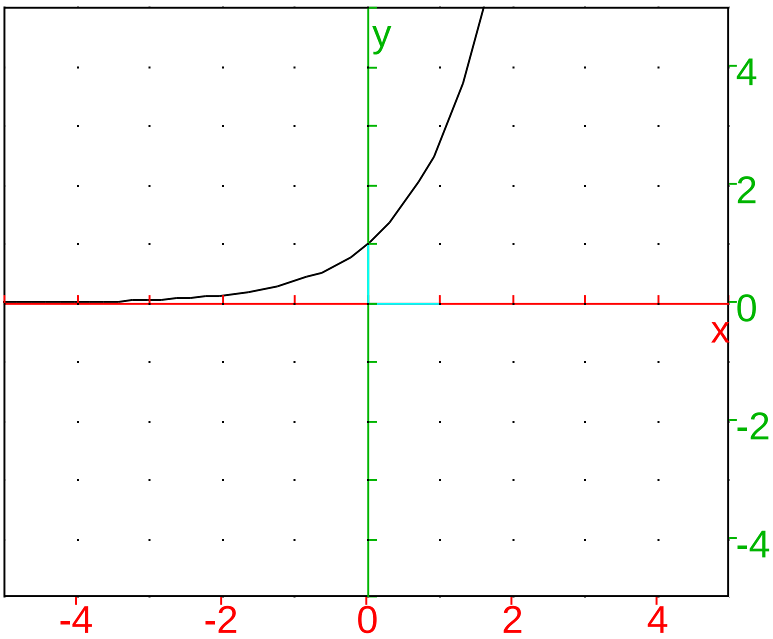
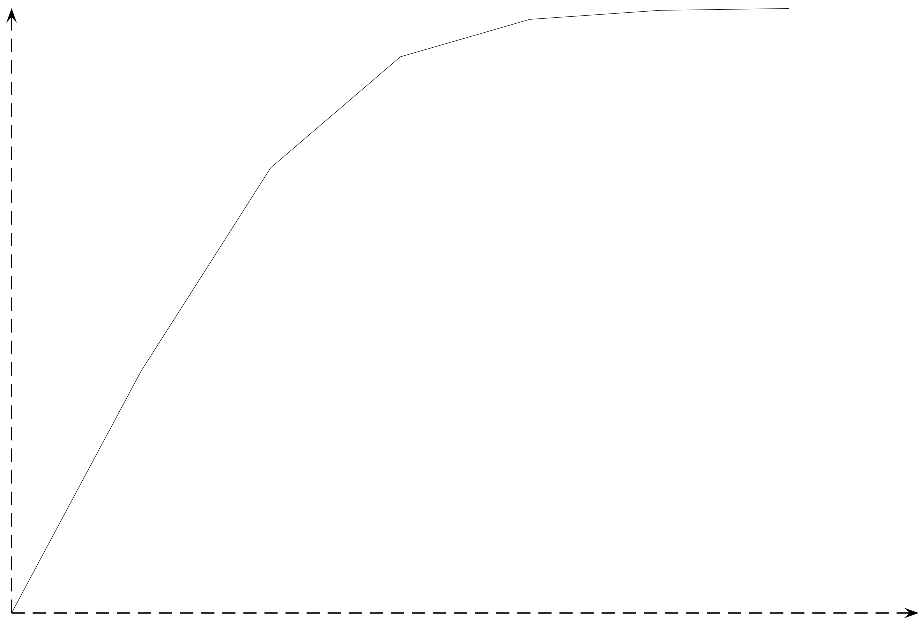


FIG. 4: interactive_odeplot(y,[x,y])

8

	A	B	C	D
0	0	0	$= polygonplot(matrix(8,2,(A0):(B7)))$	0
1	$= A0 + 0.2$	$= (-0.2) * (B0)^2 + B0 + 0.8$	0	8
2	$= A1 + 0.2$	$= (-0.2) * (B1)^2 + B1 + 0.8$	0	0
3	$= A2 + 0.2$	$= (-0.2) * (B2)^2 + B2 + 0.8$	0	0
4	$= A3 + 0.2$	$= (-0.2) * (B3)^2 + B3 + 0.8$	0	0
5	$= A4 + 0.2$	$= (-0.2) * (B4)^2 + B4 + 0.8$	0	0
6	$= A5 + 0.2$	$= (-0.2) * (B5)^2 + B5 + 0.8$	0	0
7	$= A6 + 0.2$	$= (-0.2) * (B6)^2 + B6 + 0.8$	0	0

	A	B	
0	0	0	pnt($pnt[[0, 0.2 + 0.8 * i, 0.4 + 1.472 * i, 0.6 + 1.8386432 * i, 0.8 + 1.96252143662 * i$
1	0.200000	0.800000	
2	0.400000	1.472000	
3	0.600000	1.838643	
4	0.800000	1.962521	
5	1.000000	1.992223	
6	1.200000	1.998433	
7	1.400000	1.999686	



10 *Question 5 La suite (yn) est déjà visible sur le graphique précédent mais on peut utiliser la représentation en "escalier"*

11 *Vérifions graphiquement que p(x) appartient à [0 ;2]*

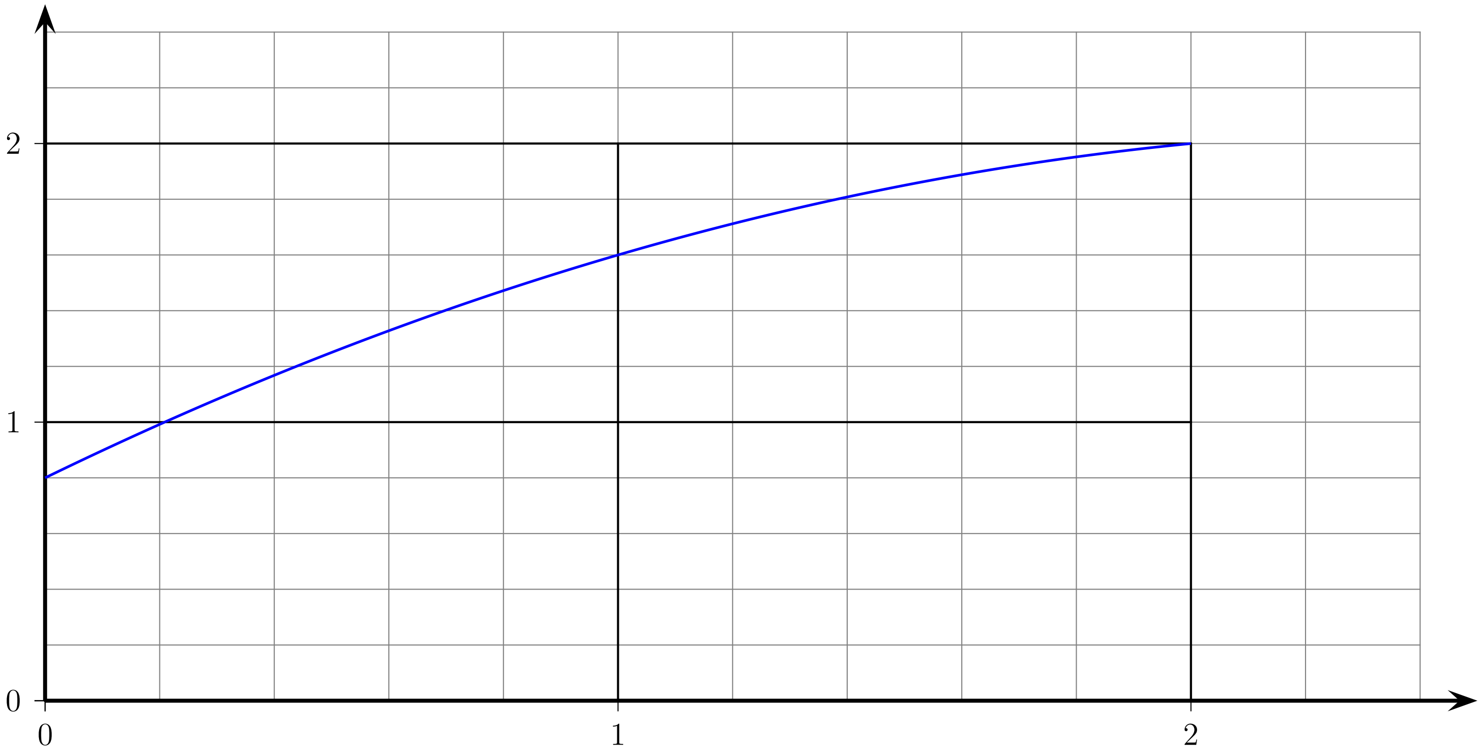
12 `p :=x->-0.2*x^2+x+0.8`

// Success

// End defining p

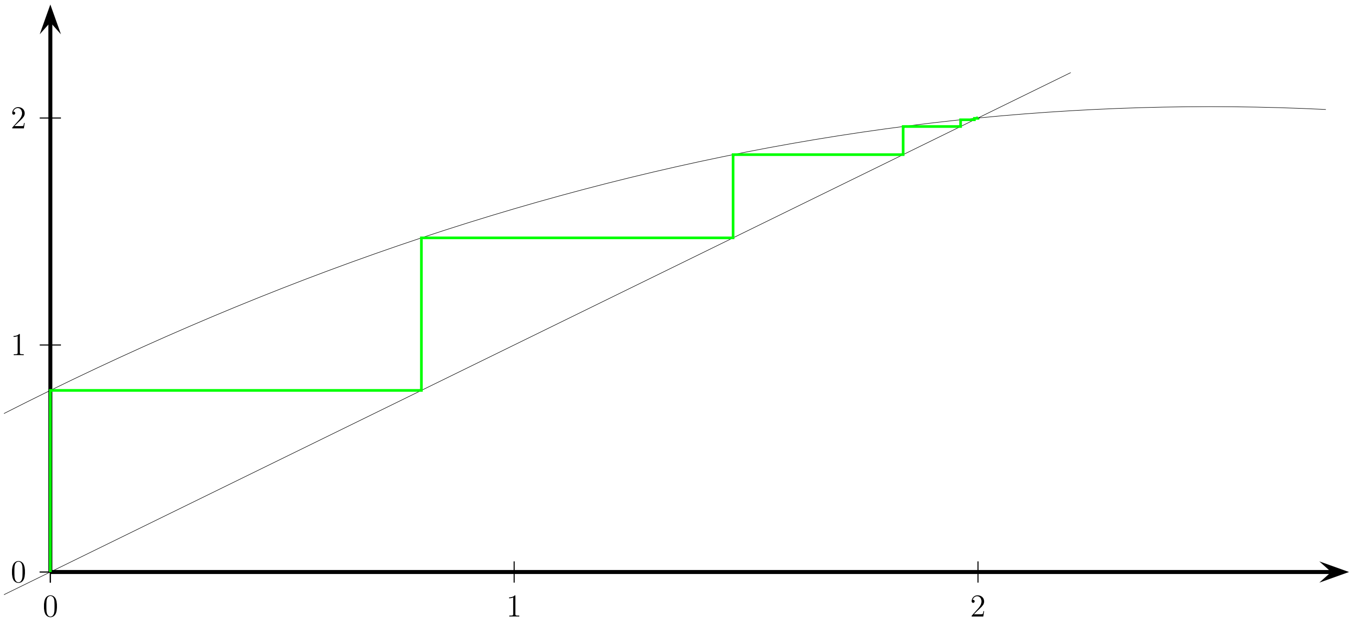
```
(x)->(-0.2)*x^2+x+0.8
```
(4)

13 `funcplot(p(x),x=0..2,couleur=bleu)`



14 *On trace la représentation graphique en escalier de (yn) (les 10 premiers termes) pour vérifier les résultats :*

15 `plotseq(p(x),0,10)`



16 *Partie B*

17 *On définit la fonction g*

18 `g(x) :=2*((exp(4*x)-1)/(exp(4*x)+1))`

// Parsing g

// Success compiling g

`(x)->2*(exp(4*x)-1)/(exp(4*x)+1)` (5)

19 *On définit g1 sa dérivée (g')*

20 `g1 :=fonction_derivee(g)`

// Success

```
(‘ x‘)->(2*exp(4*‘ x‘)*4)/(exp(4*‘ x‘)+1)+(2*(exp(4*‘
x‘)-1)*(-exp(4*‘ x‘)*4))/((exp(4*‘ x‘)+1)^2)
```
(6)

21 *On définit g2 (membre de droite de l'égalité (1)*

22 `g2(x) :=4-(g(x))^2`

// Parsing g2

// Warning : g declared as global variable(s) compiling g2

```
(x)->4-(g(x))^2
```
(7)

23 *On fait la différence de g1 et g2 et on demande de simplifier, on trouve cela montre que g vérifie (1)*

24 `simplify(g1(x)-g2(x))`

$$0 \tag{8}$$

25 *Montrtons que g vérifie (2)*

26 `g(0)`

$$0 \tag{9}$$

27 *On sait que les solutions de (1) tendent vers 2 à l'infini mais vérifions le :*

28 `limite(g(x),x,+infinity)`

$$2 \tag{10}$$

29

```
D :=droite(y=2,couleur=bleu+line_width_1)
```
droite(y=2)

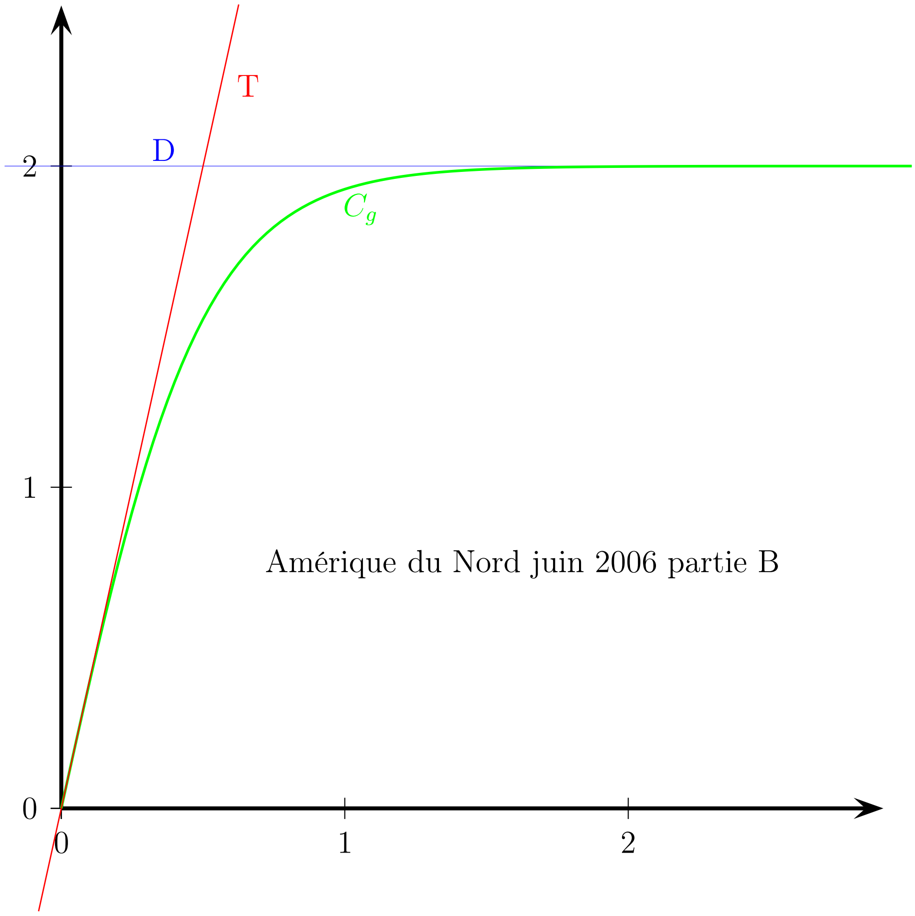
```
C_g :=funcplot(g(x),x=0..10,couleur=vert+line_width_2)
```
*plotparam(x+(i)*2*(exp(4*x)-1)/(exp(4*x)+1),x=0.0..10.0)*

```
T :=affichage(tangent(plotfunc(g(x)),0),rouge)
```
*droite(y=(4*x))*

```
I :=affichage(inter_unique(D,T_0),cyan)
```
*affichage(inter(curve(group[pnt[‘ t‘+2*i,‘ t‘,-infinity,+(infinity)],line[2*i,1+2*i]]),T_ 0),cyan)*

```
alpha :=abscisse(Inter)
```
Inter

```
legende(0.7+0.7*i,"Amérique du Nord juin 2006 partie B")
```
point(0.7,0.7)


T
D
2
C_g
1
Amérique du Nord juin 2006 partie B
0
0
1
2