2^{nde} 8 Exercices sur les fonctions

Exercice 1 Les Syldaves et leurs Schritzzñòtschhs à poil vert

Les Syldaves aiment les animaux et ceux-ci le leur rendent bien. Le Schritzzñòtschh à poil vert est d'ailleurs comme vous le savez l'animal préféré des Syldaves.
Si vous allez en Syldavie, une question que ne manqueront pas de vous poser les indigènes est : « entre votre Schritzzñòtschh à poil vert et vous, qui est le plus jeune ? ».
Pour ne pas vous laisser surprendre, mieux vaut jeter un coup d'œil sur le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	0	16	23	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96

TAB. 1 – L'âge d'un Schritzzñòtschh à poil vert ramené à l'échelle humaine

x est l'âge du Schritzzñòtschh à poil vert (en années) et y est l'âge humain correspondant (en années).

1. Représenter dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les points de coordonnées $(x; y)$ correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Que remarque-t-on ?

2. a) On appelle D la droite à laquelle appartiennent la majorité des points du graphique.
Déterminer une équation de D.

b) Adolf a 4 ans et demi ; à quel âge humain cela correspond-il ?

c) Quel sera l'âge de Grossertaleruntersturmenfeldenfühlenratschweintöte lorsque son âge humain correspondant sera 89 ans ?

d) Stalishnaïa a 9 mois ; peut-on estimer avec précision, en utilisant la droite D, l'âge humain correspondant ?

3. On propose de compléter la formule précédente pour $0 \leqslant x \leqslant 2$.

a) Tracer les trois segments de droites [OA], [AB] et [BC] avec A(1; 16), B(2; 23) et C(2; 28).
Si l'on respecte le graphique, quelle est la formule liant x et y pour :

- $0 \leqslant x \leqslant 1$
- $1 \leqslant x \leqslant 2$
- $2 \leqslant x \leqslant 3$

Dans ces conditions, quel est l'âge humain correspondant à l'âge du Schritzzñòtschh à poil vert Stalishnaïa ?

b) On envisage de chercher une formule conduisant à une courbe au tracé « plus régulier » entre les trois premiers points O, A, B.
On propose : $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels.
Calculer a, b et c sachant que la courbe doit passer par les points O, A et B.
Compléter le tableau suivant à l'aide de la formule obtenue :

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
y																

Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (x, y) correspondant aux différentes valeurs du tableau ci-dessus (échelle : 5 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 mm pour une année sur l'axe des ordonnées). Tracer la courbe qui en résulte.
Placer les points A, B et C. Cette courbe passe-t-elle par le point C.

4. Un grand savant syldave propose de décrire la correspondance entre l'âge d'un Schritzzñòtschh à poil vert et celui d'un être humain par une formule unique pour : $0 \leqslant x \leqslant 10$:

$$y = 4(x+4) - 4^{(2-x)}$$

a) Calculer y pour chacun des entiers 0, 1, 2. Cette formule vous paraît-elle satisfaisante ?

b) En utilisant une calculatrice, calculer y pour
- x variant de 0 à 1 au pas de 0,1 ;
- x variant de 1 à 2 au pas de 0,2 ;
- x variant de 2 à 10 au pas de 0,5.

Représenter sur le même graphique qu'au **3.2.** 1es points de coordonnées $(x; y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 10$

Exercice 2 Évolution de la population des Schritzzñòtschhs à poil vert

L'évolution de la population des Schritzzñòtschhs à poil vert d'une année à l'année suivante a, dans certains cas, été modélisée par des écologistes syldaves de la façon suivante :
– soit x la population, en milliers d'individus, d'une année donnée ;
– la population x' l'année suivante, toujours en milliers d'individus, est :

$$x' = f(x) = \lambda x(1-x)$$

On se propose d'étudier une telle évolution dans le cas particulier où : $x' = f(x) = 1,6x(1-x)$ et $x \in [0,1]$.
Sur le graphique 2 page suivante, on a représenté $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

Partie A ***Exemples d'évolution de la population d'une année à l'année suivante***

1. La population, une année donnée, est égale à $0,7$. Soit p la population de l'année suivante.

a) Vrai ou faux ?

i.	p est un antécédent de $0,7$ par f	Vrai – Faux
ii.	p est la solution de l'équation $f(x) = x$	Vrai – Faux
iii.	$p = f(0,7)$	Vrai – Faux
iv.	p est une solution de l'équation $f(x) = 0,7$	Vrai – Faux
v.	p est l'image de $0,7$ par f	Vrai – Faux

b) Déterminer p à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

2. La population, une année donnée, est égale à q (non nul) et s'éteint l'année suivante.

a) Vrai ou faux ?

i.	q est un antécédent de 0 par f	Vrai – Faux
ii.	q est la solution de l'équation $f(x) = x$	Vrai – Faux
iii.	$q = f(0)$	Vrai – Faux
iv.	q est une solution de l'équation $f(x) = 0$	Vrai – Faux
v.	q est l'image de 0 par f	Vrai – Faux

b) Déterminer q à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

c) Pourquoi la population s'est-elle éteinte ?

3. La population, une année donnée, est égale à r (non nul) et reste la même l'année suivante.

a) Vrai ou faux ?

i.	r est un antécédent de 0 par f	Vrai – Faux
ii.	r est la solution de l'équation $f(x) = x$	Vrai – Faux
iii.	$r = f(0)$	Vrai – Faux
iv.	r est une solution de l'équation $f(x) = 0$	Vrai – Faux

v. r est l'image de 0 par f Vrai – Faux

b) Déterminer r à l'aide du graphique, puis à l'aide d'une calculatrice.

Partie B ***Etude de l'évolution d'une population sur plusieurs années***
En 1990, la population de Schritzzn̂òtschhs à poil vert compte 0,9 milliers d'individus.
On pose $a = 0,9$, $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$, $e = f(d)$, $g = f(e)$, $h = f(g)$ et $i = f(h)$,

1. Que représentent les nombres a, b, c, d, e, g, h et i par rapport à la population de Schritzzn̂òtschhs à poil vert ?

2. Etude graphique

a) En s'aidant de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et de la droite D, placer successivement a sur l'axe des abscisses, puis b sur l'axe des ordonnées, puis b sur l'axe des abscisses, puis c sur l'axe des ordonnées, etc ...

b) Déterminer graphiquement l'évolution à long terme de la population de Schritzzn̂òtschhs à poil vert.

3. Etude algébrique

a) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de chacun de ces 7 nombres à 0,01 près.

b) Grâce à ces valeurs numériques, vérifier et éventuellement corriger les constructions graphiques.

c) Comment évolue à long terme la population de Schritzzn̂òtschhs à poil vert ?

4. Comparaison des méthodes

Quels avantages peut-on trouver à chacune des méthodes algébrique et graphique pour l'étude de l'évolution de cette population :

a) du point de vue de la précision des résultats ?

b) du point de vue de la compréhension des phénomènes ?

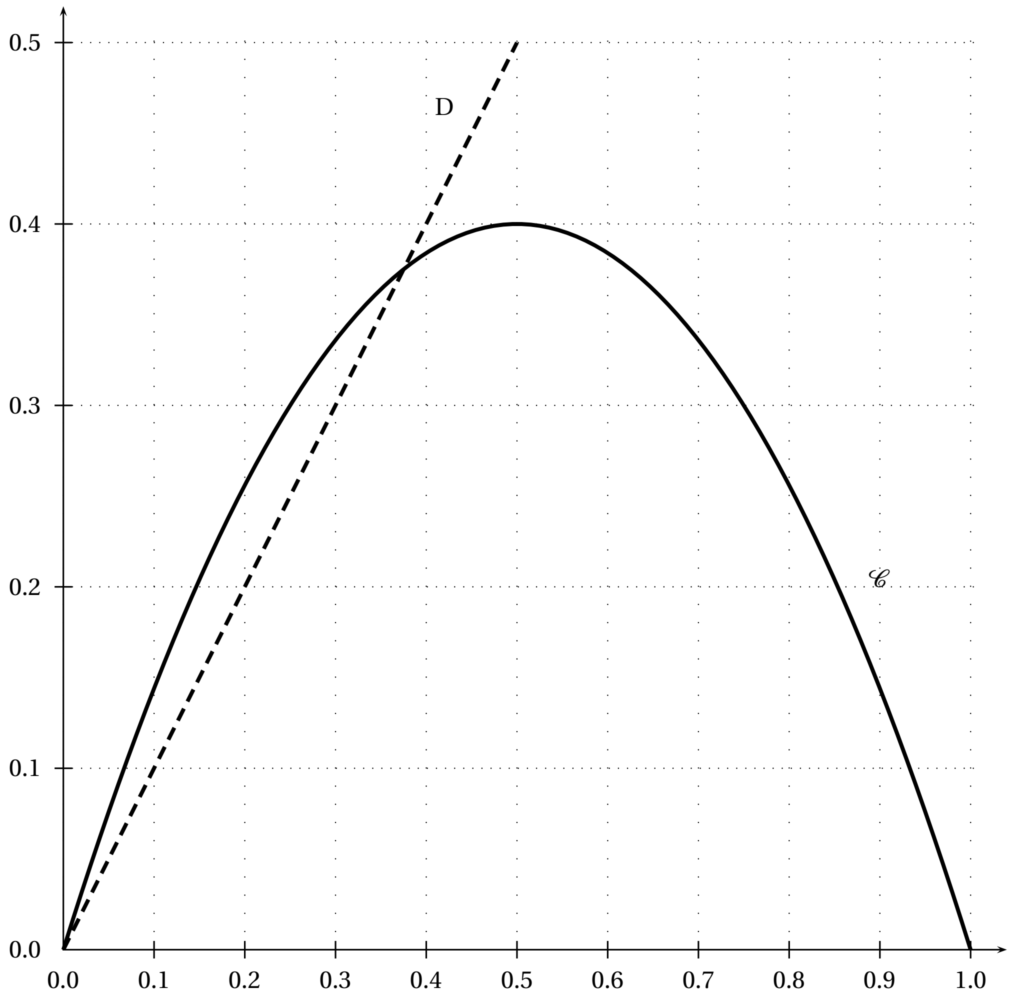


FIG. 1 – Évolution de la population de Schritzzn̂òtschhs à poil vert

Exercice 3 Science syldave...

Chimie

Au temps $t = 0$ on met du Atchtzztscct et du Brtzzscfghj (notés)A et B) dans un bécher. Ils réagissent ensemble de sorte que l'on a constamment $C_A(t) + C_B(t) = 1$, où $C_A(t)$ et $C_B(t)$ sont les concentrations respectives des produits A et B au temps t. Sur le graphique 2 on a représenté la concentration du produit A en fonction du temps (en heures).

1. Représenter sur le même graphique la concentration $C_B(t)$ du produit B.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $C_A(t) = C_B(t)$

b) $C_A(t) \geqslant C_B(t)$

c) $C_B(t) \geqslant 0,6$

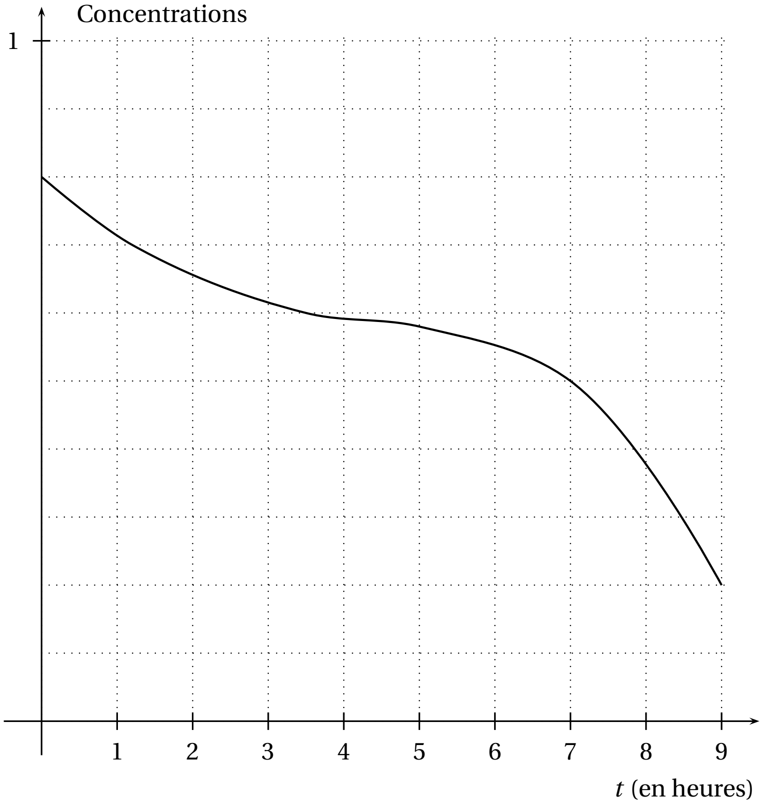


FIG. 2 –

Électricité

En électricité, si on mesure l'intensité qui traverse une résistance ainsi que la tension à ses bor nes, on trouve la relation suivante :

$$\boxed{U = RI}$$

où :
- U est tension (en Volts)
- R est la résistance (en Ohms)
- I est l'intensité (en Ampères)

On effectue une expérience au cours de laquelle on fixe la tension U = 400V aux bornes d'un dipôle et on augmente petit à petit la valeur de la résistance de ce dipôle. La mesure $R(t)$ de cette résistance au cours du temps est donnée par le graphique 3 page suivante.

1. Représenter dans le même graphique l'intensité $I(t)$ en fonction du temps.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\mathrm{I}(t) = 20$

b) $\mathrm{I}(t) \leqslant 10$

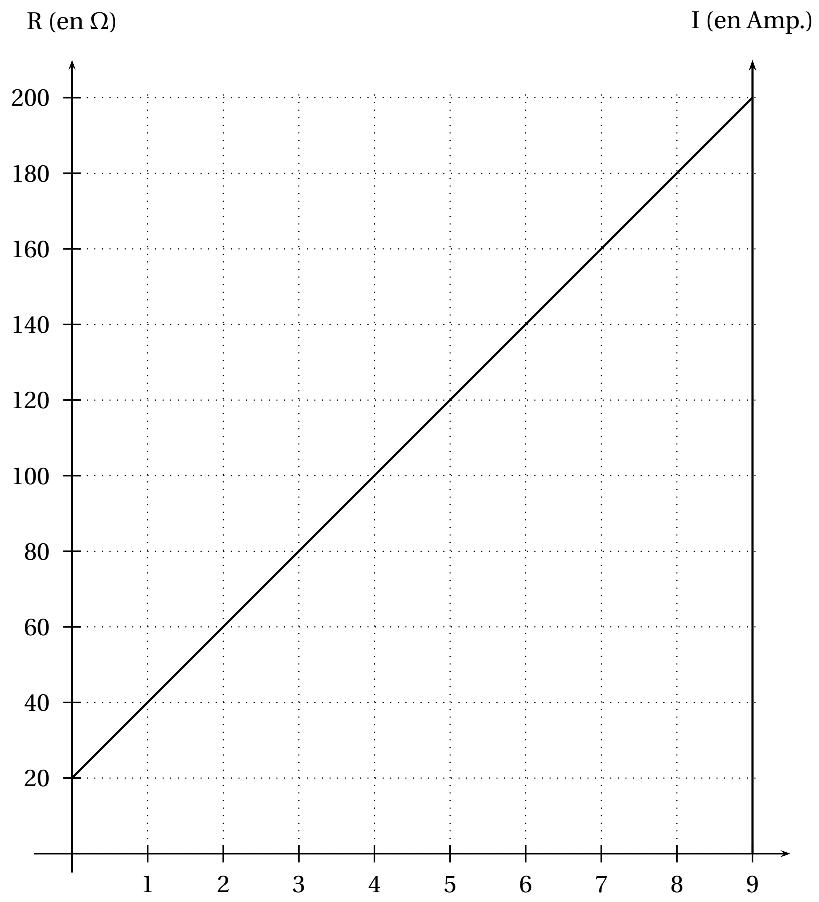
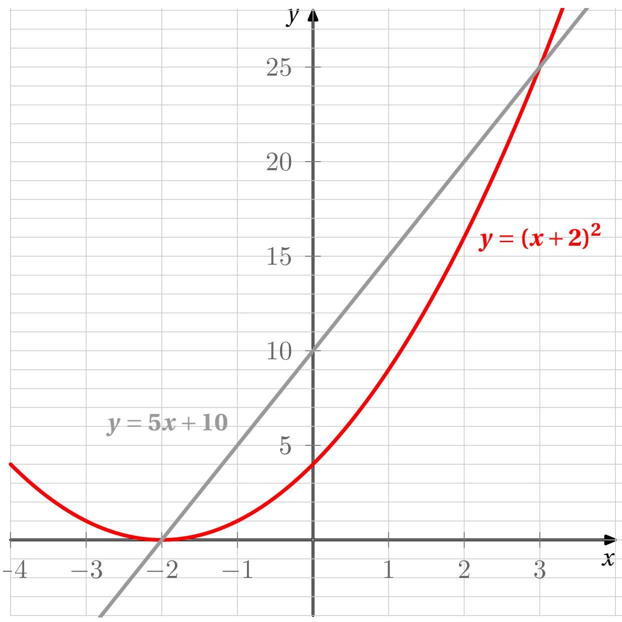


FIG. 3 –

Exercice 4 Résolution graphique

1. On a représenté dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4;3]$
   - la fonction f définie sur $\mathscr{R}e$ par $f(x) = (x+2)^2$,
   - la fonction g définie sur $\mathscr{R}e$ par $g(x) = 5x+10$.
2. Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :
   a) l'équation $(x+2)^2 = 5x+10$;
   b) l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 5x+10$.
3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.



Exercice 5 Avec XCAS

le problème

OAB est un triangle isocèle en O avec OA = 6 cm, OB = 6 cm. On place M sur [OA] et on note x = OM. On place N sur [OB] tel que BN = OM. Quand le point M varie sur [OA], le triangle OMN varie. On souhaite étudier l'aire du triangle OMN en fonction de x.

Étape 1

On ouvre une fenêtre de géométrie Alt + g

```
O:=point(0,0)
A:=point(6,0)
B:=point(0,-6)
segment(A,B)
a:=element(0..6)
M:=point(a,0)
N:=point(0,-6+a)
segment(M,N)
f:=x->aire(triangle(point(0),point(0,-6+x),point(x,0)))
P:=point(a,f(a))
coordonnees(P)
```

On modifie a avec le curseur et on observe le déplacement de M sur [OA] et le déplacement de P.
On conjecture alors le maximum de f.

Étape 2

On fait apparaître la courbe de f

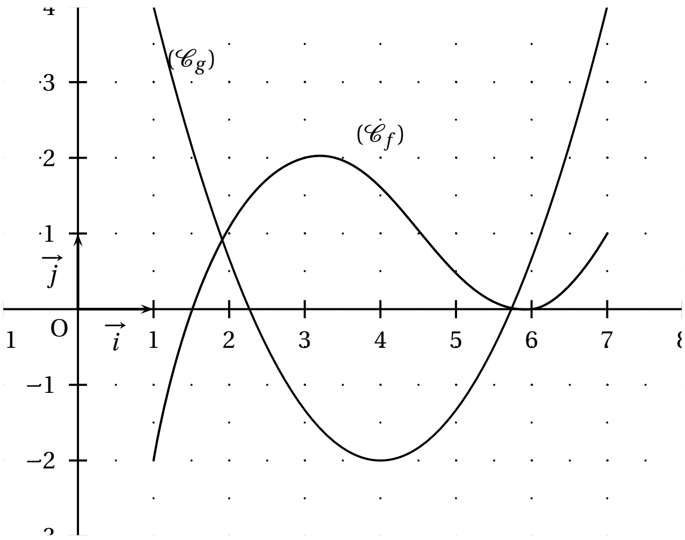
```
plot(f(x),x=0..6,couleur=vert)
```

Étape 3

On fait apparaître la formule de l'aire

```
f(x)
```

Exercice 6 Résolution graphique



On a représenté ci-dessus les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-1\ ;\ 7]$.
Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes en donnant si besoin des valeurs arrondies au dixième :

1. $f(x) = 1$

2. $f(x) = g(x)$

3. $f(x) > g(x)$

4. $g(x) \leq 0$

Exercice 7 tableau de variation

On donne le tableau de variations suivant :

x	-6		-1		2		7
$f(x)$	0	↘	-6	↗	5	↘	1

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

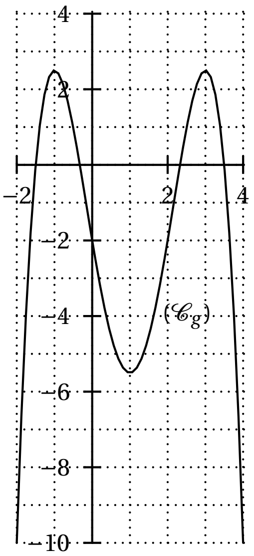
2. Comparer $f(3)$ et $f(4)$.

3. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6;7]$.

4. Déterminer le maximum de la fonction f sur $[-6;-1]$.

5. Combien 4 a-t-il d'antécédents ? Justifier

Exercice 8 Tableau de variation bis



1. Donner le tableau de variations de la fonction g dont on a donné ci-contre la courbe représentative.
2. Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solutions ? Justifier. On ne demande pas les valeurs des solutions.
3. Résoudre l'équation $g(x) = -2$.
4. On donne :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x - 2.$$

Calculer l'image de 3.

Exercice 9 Une ou plusieurs ?

On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5 ; 8]$.
On sait que la courbe passe par les points A$(-5 ; 1)$, B$(-1 ; 3)$, C$(3 ; 4)$, D$(6 ; 3)$ et E$(8 ; -1)$.

1. Placer ces points dans un repère du plan.
2. Tracer une courbe pouvant représenter f sachant que :
   - f est strictement croissante sur $[-5 ; 3]$;
   - f est strictement décroissante sur $[3 ; 8]$.
3. Quel est l'image de 3 ?
4. 3 a-t-il des antécédents ? Si oui, préciser lesquels.
5. Peut-on tracer une autre courbe respectant les conditions données ?

Exercice 10 Signe et variation

Voici le tableau de variations d'une fonction f :

x	-10		-6		-1		4
$f(x)$	5	↘	-1	↗	3	↘	-5

Voici son tableau de signes :

x	-10		-7		-3		1		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Tracer une représentation graphique de cette fonction.

Exercice 11 Prudence

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1.$$

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, les images des nombres suivants : 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 et 2.

2. Quelle conjecture peut-on alors faire sur la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$?

3. Calculer $f(0,4)$.

4. Que peut-on dire de la conjecture précédente ?

Exercice 12 Tableau de variation encore

x	-5		-2		0		3
$f(x)$	4	↘	1	↗	3	↘	-1

A l'aide du tableau de variations, indiquer si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses ou si le tableau des variations ne permet pas de conclure.

$f(-1) = 0$	
$f(-4) > f(-2)$	
$f(1) > f(2)$	
$f(-1) = 2$	
$f(-3) > 1$	
$f(-1) < f(-5)$	

Exercice 13 Parité

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = 8x^3 - 4x + 5$
- $g(x) = \dfrac{2x}{|x|}$
- $h(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Exercice 14 Parité : le retour

Soit f la fonction impaire définie sur $[-2 ; 2]$.
Son tableau de variations sur $[0 ; 2]$ est donné ci-dessus.

Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[-2 ; 2]$.

x	0		1		2
$f(x)$	0	↘	-1	↗	4

Exercice 15 Fonction affine

Soit f la fonction affine tel que $f(1) = 2$ et $f(-1) = 4$.

1. Déterminer l'expression de f.

2. Représenter la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de f dans un repère orthonormal.

Exercice 16 Ensemble de définition

Donner les valeurs de x pour lesquelles l'expression suivante a un sens, puis réduire l'expression au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{2}{x+4} - \frac{5}{x-1} + 2$$

Exercice 17 Fonctions affines

Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, on définit la droite (d) par son équation réduite $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

1. Donner trois points de coordonnées entières de la droite (d).

2. Tracer la droite (d).

3. Mettre en évidence sur le graphique **le coefficient directeur** et **l'ordonnée à l'origine**.

4. Déterminer l'équation réduite de la droite (d') parallèle à la droite (d) passant par le point $\mathrm{S}(-3\,;\,-1)$.

Exercice 18 Lecture graphique

1. Résoudre graphiquement, en justifiant aussi précisément que possible, en donnant si besoin les valeurs approchées au dixième :

a) l'équation $f(x) = 0$;

b) l'équation $f(x) = 2$;

c) l'équation $f(x) = g(x)$;

d) l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

2. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.