CHAPITRE XV

INTÉGRATION
Quelques corrigés

Solution - 1 Quizz

1. La question est (volontairement...) mal posée. C'est faux sur un intervalle quelconque, c'est vrai si l'intervalle est centré en 0. Nous n'avons pas l'outil de changement de variable à notre disposition, mais des considérations d'aires suffisent. En effet, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or les aires algébriques de ces deux intégrales sont opposées par des considérations de symétrie, donc leur somme est nulle.
Il faut donc être vigilant lors de la lecture d'un énoncé.

2. Faux : l'énoncé de la question suivante nous met la puce à l'oreille. Il suffit de considérer une fonction paire de période 2, par exemple $f\ :\ x \mapsto \cos(\pi x)$. Vérifiez qu'elle convient.

3. cf question précédente.

4. On pourrait le penser en effet, car l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe devient « très petite ». Et pourtant cela peut être faux, en prenant par exemple $f(t) = 1/_t$, alors $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ln x$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Malgré tout, ça peut être vrai, comme par exemple avec la fonction $x \mapsto 1/_{x^2}$. Vous découvrirez ça l'an prochain.

5. cf question précédente.

6. Essayez $t \mapsto 32/_{t^2}$.

7. Faux : Prenez $u = 1{,}5$. alors $\int_0^{1{,}5} \mathrm{E}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{1{,}5} 1\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \not\in \mathbb{N}$

8. Le cours dit que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t|$, c'est donc qu'il doit y avoir des cas où il y a égalité et d'autres où l'inégalité est stricte.
Pour l'égalité, il suffit évidemment de prendre une fonction de signe constant, par exemple $t \mapsto t^2$ sur n'importe quel intervalle $[a\,;b]$.

9. On pense à une fonction qui n'est pas de signe constant, par exemple $t \mapsto t$ sur $[-1\,;1]$

10. Essayons de prouver notre intuition. Avec des notations simplifiées on obtient
$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \Rightarrow \int_a^b |f| \pm \int_a^b f$ d'où $\int_a^b \big(|f| - f\big) = 0$ ou $\int_a^b \big(|f| + f\big) = 0$.
Or $|f| - f$ et $|f| + f$ sont continues et positives, donc $|f| - f = 0$ ou $|f| + f = 0$, c'est à dire que f est de signe constant sur $[a\,;b]$

11. Faux : $\int_2^3 xt^2\,\mathrm{d}t = x[t^3/3]_2^3 = 19x/_3$ et $\int_2^3 xt^2\,\mathrm{d}x = t^2[x^2/2]_2^3 = 5t^2/_2$

12. Faux : la première intégrale vaut $19x/_3$ et la 2$^{\text{ème}}$ $19t/_3$.

13. C'est le principe même de la valeur moyenne. Par exemple $\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1/_2\,\mathrm{d}u$.

14. Vrai : soit $x \in [a\,;b]$. Comme f est bornée sur $[a\,;b]$, f est aussi bornée sur $[a\,;x]$, c'est à dire qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $t \in [a\,;x]$ et donc $\int_a^x m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire $m(b-x) \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-x)$, et finalement

$$m(b-a) \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}b$$

15. Faux : là ce n'est plus pareil. Ce qui assure la croissance de le fonction définie par l'intégrale, c'est la positivité de f. Il suffit donc de choisir une fonction croissante et négative sur $[a\,;b]$, par exemple $t \mapsto t-2$ sur $[0\,;1]$ car on aura en notant « à la physicienne »

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t = x-2 < 0 \text{ pour tout } x \in [0\,;1]$$

16. La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire donc son intégrale sur $[-2\,;2]$ est nulle et par suite sa valeur moyenne aussi.

Solution - 2 Calculs de primitives

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{(x^2+2x+2)^3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^3}$ avec $u(x) = x^2+2x+3$ donc $\int f_1(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(t^2+2t+2)^2}$.

2. $f_2(x) = u'(x)\times u(x)$ avec $u(x) = \ln x$, donc $\int f_2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$.

3. $f_3(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos x$, donc $\int f_3(x)\,\mathrm{d}x = -\ln(|\cos t|)$.

4. $f_4(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$, donc $\int f_4(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\ln|t||$

Solution - 3 Calcul d'intégrales

1. Une intégration par parties s'impose $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = 3(x-1)^2 & v(x) = (x-1)^3 \end{cases}$ et on obtient

$$\mathrm{I}_1 = \left[(x-1)^3\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \int_1^2 x^2-3x+3-\frac{1}{x} = 2\ln 2 - \frac{5}{6}$$

2. Avec sin et exp, on « tourne en rond », donc 2 intégrations par parties s'imposent pour obtenir une équation d'inconnue I_2

$\begin{cases} u_1(x) = \mathrm{e}^{-x} & u_1'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v_1'(x) = \sin x & v_1(x) = -\cos x \end{cases}$ $\mathrm{I}_2 = \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$

$\begin{cases} u_2(x) = \mathrm{e}^{-x} & u_2'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v_2'(x) = \cos x & v_2(x) = \sin x \end{cases}$ $\mathrm{I}_2 = \mathrm{e}^{-\pi}+1-\left[\mathrm{e}^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \mathrm{I}_2$, d'où $\mathrm{I}_2 = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$

3. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} & v(x) = \tan x \end{cases}$ $i_3 = [x\tan x]_0^{\pi//4} - \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_1^3 u'(x)\times(u(x))^3\,\mathrm{d}x$ avec $u(x) = \ln x + x$, donc $\mathrm{I}_4 = \left[\dfrac{(\ln x + x)}{4}\right]_1^3 = \dfrac{(3+\ln 3)^3-1}{4}$

5. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$, donc

$$\mathrm{I}_5 = \left[\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_{-1}^1 = \ln\frac{1+e}{1+1/e} = \ln e\left(\frac{1+e}{e+1}\right) = 1$$

6. Faites un dessin et vous verrez qu'il s'agit de l'aire du demi-disque unité supérieur, donc $\mathrm{I}_6 = \pi/2$.

Solution - 4 Primitives des puissances de cos et sin

1. $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$

2. $\cos^5 x = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{5ix}+5\mathrm{e}^{3ix}+10\mathrm{e}^{ix}+10\mathrm{e}^{-ix}+5\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{5ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{16}\left(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos x\right)$

3. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\cos(5t)+5\cos(3t)+10\cos t\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(5t)}{5}+\frac{5\sin(3t)}{3}+10\sin t\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{43\sqrt{2}}{120} - \frac{203}{480}$$

Solution - 5 Limites de suites définies par une intégrale

1. Regardez bien l'intervalle d'intégration. Ici on utilise $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $x+n \geqslant \pi+n$ sur $[0\,;\pi]$.

$$0 \leqslant \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi}\frac{1}{\pi+n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\pi+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Éliminer les x gênants et garder des n pour la limite, voilà notre tactique, sachant que $1+x^2 \geqslant 1$ sur $[0\,;1]$.

$$0 \leqslant \int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3. Ici, c'est plus rusé. Il faut « sentir » qu'entre 1 et 2, « ça » va diverger car la fonction à intégrer « ressemble » à x^n qui est « plus fort » que n. Donc il faudrait majorer la fonction. Mais une majoration brutale en utilisant les bornes d'intégration n'amène rien. Alors on ruse : x^{2n} « ressemble » à $x^{2n}-1=(x^n-1)(x^n+1)$ et on va pouvoir « éliminer » le dénominateur. Il y a beaucoup de guillemets car on marche à l'intuition, mais l'intuition ne descend pas du ciel : elle vient d'une bonne compréhension des phénomènes. Il faut apprendre à localiser ce qui cloche...

$$\int_0^2 \frac{x^{2n}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^2 \frac{x^{2n}-1}{x^n+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^n-1)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{2^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

4. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^n}$ est croissante, donc on majore

$$0 \leqslant \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{1+1/n} \sqrt{1+(1+1/n)^n}\,\mathrm{d}x \leqslant (1+1/n-1)\sqrt{1+(1+1/n)^n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt{1+(1+1/n)^n}=0$ d'où
$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^{1+1/n}\sqrt{1+t^n}\,dt = 0$ en appliquant la taca taca tac tac tique du gendarme.

5. Encore une fois, des majorations trop brutales ne nous mènent à rien. Remarquons toutefois que $\dfrac{n\sin x}{x+n}$ tend vers $\sin x$ quand n tend vers $+\infty$ ce qui nous incite à nous occuper de leur différence.

$$0 \leqslant \left|\int_0^\pi \left(\frac{n\sin x}{x+n}-\sin x\right)dx\right| = \left|\int_0^\pi \frac{x\sin x}{x+n}\,dx\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{n}\,dx = \frac{\pi^2}{n} \to 0$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\,dx = 2.$

Solution - 6 Transformée de Laplace de la fonction rampe
Ce calcul intervient notamment en électronique. Si p vaut 0, $\mathrm{I}(t)=t^2/2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{I}(t)=+\infty$.
Sinon, une intégration par parties règle l'affaire.

$$\begin{cases} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=\mathrm{e}^{-px} & v(x)=-\mathrm{e}^{-px}/p \end{cases} \qquad \mathrm{I}(t)=\left[\frac{-x\mathrm{e}^{-px}}{p}\right]_0^t+\frac{1}{p}\int_0^t \mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{-t\mathrm{e}^{-pt}}{p}-\frac{1}{p^2}\left(\mathrm{e}^{-pt}-1\right).$$

Si $p<0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{I}(t)=+\infty$, et si $p>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{I}(t)=\dfrac{1}{p^2}$.

Solution - 7 Transformée de Fourier du signal $s(t)=\cos(\pi t)\Pi(t)$
On utilise la formule $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ pour linéariser l'expression à intégrer.

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(s) &= 2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{2}\Big(\cos\big((2f+1)\pi t\big)+\cos\big((2f-1)\pi t\big)\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(2f+1)\pi}\sin(2f+1)\pi t+\frac{1}{(2f-1)\pi}\sin(2f-1)\pi t\right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 2\left(\frac{1}{(2f+1)\pi}\sin\left((2f+1)\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{(2f-1)\pi}\sin\left((2f-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Or $\sin(\alpha-\pi/2)=-\cos\alpha$ et $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos\alpha$, donc

$$\mathrm{X}(s)=\frac{4}{(1-4f^2)\pi}\cos(f\pi)$$

Solution - 8 Lemme de Gronwall
N'oubliez pas que la dérivée de $x\mapsto\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$. On obtient donc

$$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

qui est négatif d'après l'énoncé. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, or elle est positive d'après les hypothèses et g(0)=0. Donc g est identiquement nulle. On en déduit que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$. Or f est elle-même positive, donc est aussi identiquement nulle.

Solution - 9 Développement en série entière de $\ln(1-x)$

1. Remarquons tout d'abord que $\sum_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$ puisque $t<1$, donc

$$\left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right| = \left|\frac{t^{n+1}}{1-t}\right| \leqslant \frac{t^{n+1}}{1-x}$$

car $0 \leqslant t \leqslant x$

2. Sur $[-1\,;0[$, $|1-t| \geqslant 1$, donc on obtient cette fois-ci

$$\left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right| = \left|\frac{t^{n+1}}{1-t}\right| \leqslant \| t|^{n+1}$$

3. On « sent » qu'une intégration est passée par là. Découpons à nouveau notre problème en 2.

- ▷ Sur $[0\,;1[$, on intègre l'inégalité obtenue :

$$\left|\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right) dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right| dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}\, dt = \frac{1}{n+2}\,\frac{x^{n+2}}{1-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

or

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

donc nous en déduisons le résultat demandé.

- ▷ Sur $[-1\,;0[$, seul le majorant change, mais on a cette fois-ci

$$\int_{-1}^{0} (-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et nous obtenons le même résultat.

Solution - 10 Le problème de l'ivrogne

Étude de la convergence d'une série

1. Puisque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, il contient en particulier tous les termes de rang pair.

2. Il s'agit du chemin parcouru après n pas.

3. $\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} = \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{2\mathrm{N}} \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}$ son premier terme, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs. Or $\mathrm{N} \geqslant 1$, donc

$$\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} - \mathrm{S}_{\mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

4. Si l'on suppose que (S_n) converge vers un réel ℓ, alors (S_{2n}) aussi et ainsi $(\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n)$ converge vers $\ell-\ell=0$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n) \geqslant 1/2$, d'où la contradiction : La suite (S_n) diverge donc, mais on ne sait pas encore de quelle manière. Cependant, il est immédiat de constater que la suite (S_n) est strictement croissante, donc soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Compte tenu des résultats précédents, nous pouvons conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$.

Utilisation du logarithme népérien et des suites adjacentes

1. a) On étudie rapidement la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1+t) - t$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

On en déduit que φ est négative sur $]-1\,;+\infty[$, d'où le résultat.

b) D'une part $w_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = 0$.

De plus $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ d'après la question précédente, donc (v_n) est croissante.

Enfin, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$, donc (w_n) est décroissante.

Nous en déduisons que les suites sont adjacentes.

c) Alors $v_n \leqslant \gamma \leqslant w_n$ pour tout entier naturel n non nul. En particulier $v_2 \leqslant \gamma \leqslant w_2$. Or $v_2 \simeq 0,4$ et $w_2 \simeq 0,8$, d'où le résultat.

2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \gamma$, alors il existe une suite (e_n) convergeant vers 0 telle que $w_n = \gamma + e_n = S_n - \ln n$, d'où le résultat.

3. Comme $v_n \leqslant \gamma \leqslant w_n$, il suffit que $w_n - v_n \leqslant 0,01$ = pour avoir l'approximation cherchée.

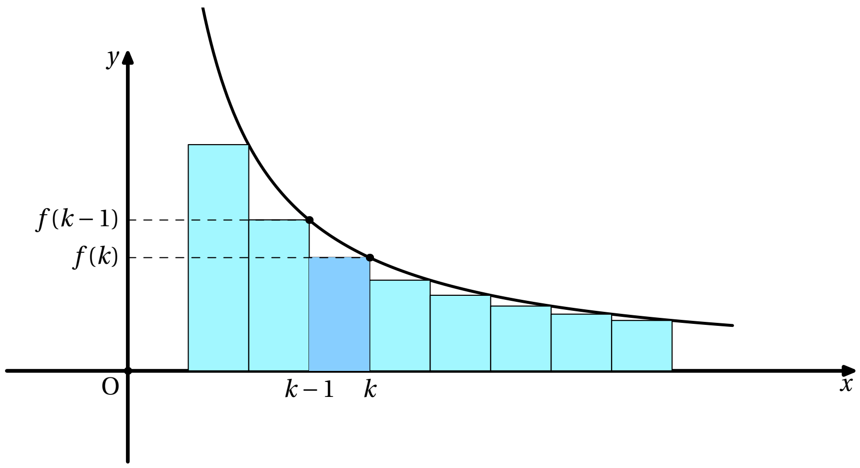
$w_n - v_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 0,01 \Longleftrightarrow n \geqslant \dfrac{1}{e^{0,01}-1} \simeq 99,5.$

Grâce à XCAS, on calcule w_{100} : `sum(1/k,k=1..100)-ln(100)`. On obtient $\gamma = 0,58 \pm 10^{-2}$

Comme 24 heures correspondent à 86400 secondes, le chemin parcouru par l'ivrogne est égal à $S_{86\,400}$ soit environ 11,94 mètres...

Comparaison série-intégrale

1. Complétons le schéma proposé



L'aire du rectangle foncé est inférieure à l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = k-1$ et $x = k$.

Cela se traduit par

$$f(k) \times \big(k-(k-1)\big) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sans parler dessin, puisque f est décroissante sur $]0,+\infty[$, on peut écrire que pour tout $x \in [k-1\,;\,k]$, on a $f(k) \leqslant f(x)$. On intègre alors cette inégalité sur $[k-1\,;\,k]$ et on obtient par conservation de l'ordre

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k) \times \big(k-(k-1)\big) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c'est à dire le même résultat que celui obtenu par observation du graphique.

Il ne reste plus qu'à faire la somme membre à membre pour k variant de 2 à N et à utiliser la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{\mathrm{N}} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. D'après la question précédente on obtient que

$$S'_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$$

On obtient donc que (S'_n) est majorée par 2. Or la suite (S'_n) est bien sûr croissante : elle est donc convergente.

3. Nous avons déjà établi que $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$
De même, pour tout $x \in [k\,;\,k+1]$, on a $f(x) \leqslant f(k)$ compte tenu de la décroissance de f et donc

$$\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k}^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k)$$

Finalement

$$\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme membre à membre pour k variant de $\mathrm{N}+1$ à K en utilisant toujours la relation de Chasles

$$\int_{\mathrm{N}+1}^{\mathrm{K}+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{K}} f(k) \leqslant \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{K}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{S}'_{\mathrm{K}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} f(k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f(k) + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{K}} f(k)$ et donc

$$\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\mathrm{K}} f(k) = \mathrm{S}'_{\mathrm{K}} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f(k)$$

La double inégalité de la question précédente devient donc

$$\mathrm{F}(\mathrm{K}+1) - \mathrm{F}(\mathrm{N}+1) \leqslant \mathrm{S}'_{\mathrm{K}} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant \mathrm{F}(\mathrm{K}) - \mathrm{F}(\mathrm{N})$$

Or $\lim_{\mathrm{K}\to+\infty} \mathrm{F}(\mathrm{K}) = 0 = \lim_{\mathrm{K}\to+\infty} \mathrm{F}(\mathrm{K}+1)$ et $\lim_{\mathrm{K}\to+\infty} \mathrm{S}'_{\mathrm{K}} = \mathrm{L}$, donc

$$-\mathrm{F}(\mathrm{N}+1) \leqslant \mathrm{L} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant -\mathrm{F}(\mathrm{N})$$

5. On a bien sûr $\mathrm{F}(x) = -1/x$, donc la double inégalité précédente devient

$$\frac{1}{\mathrm{N}+1} \leqslant \mathrm{L} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$$

donc $\left|\mathrm{L} - \mathrm{S}'_{\mathrm{N}}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}$.
Ainsi, pour que S'_{N} fournisse une valeur approchée de L à 10^{-2} près il suffit que N soit supérieur à 10^2.
XCAS nous fournit le résultat en entrant `sum(1/k^2,k=1..100)`.

$$\mathrm{L} = 1{,}64 \pm 10^{-2}$$

Pour votre culture générale, il faut savoir que L vaut en fait $\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire environ 1,6449340668482264364724151666 5.

6. Il ne sera donc pas difficile de suivre la progression de l'ivrogne...

Solution - 11 ROC Primitive- intégrale

1. a) Sur $[1\,;\,+\infty[$ la fonction exponentielle et la fonction $t \mapsto t$ sont continues et la seconde ne s'annulant pas sur $[1\,;\,+\infty[$, leur quotient est continu.

b) La fonction f est de la forme : $f = \frac{u}{v}$ où $u(t) = \mathrm{e}^t$, $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et la seconde ne s'annule pas sur $[1\,;\,+\infty[$, donc f est dérivable et sur $[1\,;\,+\infty[$, $f'(t) = \frac{\mathrm{e}^t \times t - \mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t(t-1)}{t^2}$. L'exponentielle et la fonction carré sont strictement positives sur $[1\,;\,+\infty[$, donc le signe de f' est, celui de $t-1$. Donc sur $[1\,;\,+\infty[$, on a $f'(t) \geqslant 0$. Conclusion : la fonction f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

a) $\mathscr{A}(1)$ est l'aire (exprimée en u.a.) du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$ représentant f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = 1$. Donc $\mathscr{A}(1) = 0$.

b) Soit x_0 tel que $1 \leqslant x_0$. La fonction f étant croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a $f(x_0) < f(x_0 + h)$. L'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ est supérieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0)$ et inférieure à l'aire de la surface (rectangle) limitée par la droite d'équation $y = f(x_0 + h)$. On a donc :

$$f(x_0)h < \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) < f(x_0 + h).$$

D'où par division par $h > 0$, le résultat :

$$f(x_0 < \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} < f(x_0 + h)$$

c) Avec $1 < x_0,\ h < 0$ et $1 \leqslant x_0 + h \leqslant x_0$. La fonction f étant croissante pour $x \geqslant 1$, on a $f(x_0 + h) < f(x_0)$. On encadre de la même façon l'aire limitée par la courbe par l'aire des deux rectangles. On a donc

$$f(x_0 + h) \times (-h) < \mathscr{A}(x_0 - \mathscr{A}(x_0 + h) < f(x_0 \times (-h)$$

et par division par $-h$ qui est positif :

$$f(x_0 + h) < \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} < f(x_0)$$

d) D'après la continuité de f en x_0, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0$. Donc d'après le théorème des « gendarmes », le taux d'accroissement de la fonction $\mathscr{A}$ admet pour limite $f(x_0)$ en x_0. Cette fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable en $x_0 > 1$ et $\mathscr{A}'(x_0) = f(x_0)$.

e) Le raisonnement fait ci-dessus est vrai pour tout $x_0 > 1$. Donc la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $\mathscr{A}' = f$.

Solution - 12 Calcul de volume

1. La solution générale de l'équation $y' + y = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-x}$, où k est une constante réelle arbitraire.
L'image de 0 est e donc $k\mathrm{e}^0 = \mathrm{e}$ soit $k = \mathrm{e}$.
La fonction f cherchée est donc celle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x}$. Soit $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.

2. $\mathrm{e}^{1-x} = t \iff 1 - x = \ln t$. La solution de cette équation est donc le réel $1 - \ln t$.

3. Soit u et v les fonctions définies sur $[1\ ,\ e]$ respectivement par $u(t) = (1 - \ln t)^2$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et leurs dérivées u' et v', définies respectivement par $u'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$ et $v'(t) = 1$, continues sur l'intervalle $[1\ ,\ e]$. Le théorème d'intégration par parties s'applique donc et :
$\mathrm{V} = \pi\left(\left[t(1 - \ln t)^2\right]_1^e + 2\int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)\,\mathrm{d}t\right)$.
Calculons à nouveau par parties $\int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)\,\mathrm{d}t$.
Posons $u(t) = 1 - \ln t$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[1\ ,\ e]$, de dérivées respectives u' et v', continues sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, définies par $u'(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$.
D'où : $\int_1^{\mathrm{e}} (1 - \ln t)\,\mathrm{d}t = \left[t(1 - \ln t)\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}t = -1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e} - 2$.
En reportant dans l'expression de V, on obtient :
$\mathrm{V} = \pi(-1 + 2(\mathrm{e} - 2)) = \pi(2\mathrm{e} - 5)$.

Solution - 13 Volume bis

Partie A

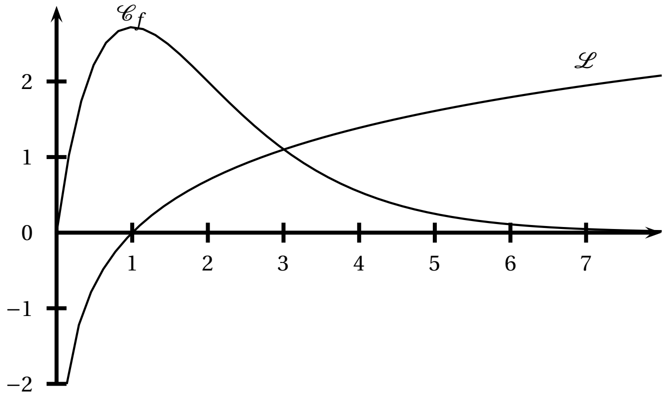
1. On a $f(x) = \mathrm{e}^2 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$; f est donc le quotient de deux fonctions dérivables (la seconde ne s'annulant pas) : elle est donc dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x+2} - x\mathrm{e}^{-x+2} = (1 - x)\mathrm{e}^{-x+2}$ qui est du signe de $1 - x$ car $\mathrm{e}^{-x+2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Limites aux bornes : $f(x) = \mathrm{e}^2 \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.
D'autre part $f(0) = 0 \times \mathrm{e}^2 = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

2. a) Sur la calculatrice l'examen des deux courbes permet de conjecturer à l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.



b) Si $g(x) = \ln x - f(x)$ différence de deux fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{1}{x} - (1 - x)\mathrm{e}^{-x+2}$. Or d'après la question **1.**, $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x+2} \leqslant 0$ sur $[1 ; +\infty[$, donc $-(1-x)\mathrm{e}^{-x+2} \geqslant 0$ et comme $\dfrac{1}{x} > 0$, $g'(x) > 0$ sur $[1 ; +\infty[$.
La fonction g continue est donc croissante sur $[1 ; +\infty[$.
De plus $g(1) = -f(1) = -\mathrm{e} < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
Il existe donc un réel unique $\alpha > 1$ tel que $g(\alpha) = 0 \iff \ln \alpha = f(\alpha)$.

c) La calculatrice permet d'appréhender α au millième : $\alpha \approx 3,005$.

Partie B

1. On intègre par parties avec :
$$\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle d'intégration.
Donc $\mathrm{I} = \left[-x^2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 + \displaystyle\int_0^3 x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
On intègre cette dernière intégrale à nouveau par parties :
$$\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$$
, les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' étant continues sur l'intervalle d'intégration. On obtient finalement I $= \left[-x^2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \left[x\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 = -\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-6} - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-6} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}$.

2. a) On a $\mathcal{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \pi x^2\mathrm{e}^{-2x+4}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^4 \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^4 \times \mathrm{I}$ (en unités de volume).

b) L'unité de volume est égale à $4^3 = 64\left(\mathrm{cm}^3\right)$. D'où
$\mathcal{V} = \pi\mathrm{e}^4\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}\right) \times 64 = 16\pi\mathrm{e}^4 - 400\pi\mathrm{e}^{-2} \approx 2\ 574\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Solution - 14 Calcul d'aire

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$

1. a) La fonction affine $1-x$ est dérivable ; $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est le quotient de deux fonctions dérivable, la seconde ne s'annulant pas sur $]0\ ;\ +\infty[$.
f est donc dérivable sur cet intervalle et :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x}+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{2-\ln x - 2x\ln x}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{-\left[\ln x + 2(x\ln x - 1)\right]}{2x\sqrt{x}}$ Or $x\sqrt{x} > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $-\left[\ln x + 2(x\ln x - 1)\right] = \mathrm{N}(x)$.

b) $\mathrm{N}(1) = 0$. Si $x < 1$, $\sqrt{x} > 1$ et par produit $x\sqrt{x} > 1 \iff x\sqrt{x} - 1 > 0 \iff 2(x\sqrt{x} - 1) > 0$. De plus si $x > 1$, alors $\ln x > 0$ et par somme, puis opposé $\mathrm{N}(x) < 0$.
Le même raisonnement avec $0 < x < 1$ conduit à $\mathrm{N}(x) > 0$.

c) Conclusion : la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. Le maximum de f est obtenu quand la dérivée s'annule en changeant de signe, donc en 1 et il vaut $f(1) = 0$. La fonction f est donc négative sur l'intervalle étudié.

2. a) $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour la fonction quotient on intégre par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(x) = 2\ln x & v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ u'(x) = \dfrac{2}{x} & v(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

u et v étant dérivables et u' et v' continues, on peut intégrer par parties :
$\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{2\ln x}{2\sqrt{x}} = \left[2\ln x\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} \frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{2\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{1} \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$
$4\displaystyle\int_{\alpha}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[4\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}$.
Finalement $\mathscr{A}(\alpha) = \left[2\ln x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + x - \dfrac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{1} =$
$\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} - 4\sqrt{\alpha} - 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha - \dfrac{7}{2}$.

b) On sait que $\alpha > 0$. On peut donc poser $\alpha = \beta^2$ avec $\beta > 0$. Donc $\sqrt{\alpha}\ln\alpha = \sqrt{\beta^2}\ln\beta^2 = \beta\times 2\ln\beta$. La fonction carré étant continue, si α tend vers zéro, β aussi, et on sait que $\displaystyle\lim_{\beta\to 0}\beta\ln\beta = 0$. La limite des quatre premiers termes est nulle, donc finalement :

$$\lim_{\alpha\to 0}\mathscr{A}(\alpha) = -\frac{7}{2}.$$

Géométriquement, cette limite correspond à l'opposé (car $f(x) < 0$) de la mesure de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. a) On a $1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \ln 1 \leqslant \ln x \leqslant \ln 2$ et
$1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{2} \iff \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1$ et par produit :
$0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{2} < 1$.

b) Par récurrence : $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$. L'appartenance est vraie au rang zéro.
Hérédité : si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, d'après le **a.** $0 \leqslant \dfrac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} \leqslant 1 \iff$
$1 \leqslant \dfrac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \leqslant 2 \iff 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
On a bien démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\ ;\ 2]$.

4. Comme $u_{n+1} = f(u_n) + u_n \iff u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ et que l'on a démontré au **1. c.** que f est négative, on montre aussi que la suite (u_n) est décroissante.

5. a) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est donc convergente vers une limite ℓ.

b) Or par continuité de la fonction f dérivable, la relation $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ donne à la limite $\ell = f(\ell) + \ell \iff f(\ell) = 0$.
Or on a vu à la question **1. c.** que la seule valeur qui annule f est le nombre 1. Conclusion $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 1$.