Vers l'infini et au-delà

Les suites : la suite

Guillaume CONNAN

Lycée Notre-Dame - T^{ale}S3

septembre 2018

Sommaire

Notre Dame LYCÉES Rezé

Sommaire

Sommaire

Définition (suite numérique)

Une suite (sous-entendue numérique) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou sur une partie seulement de $\mathbb{N}$. Définir une suite, c'est donc associer un nombre réel à tout élément d'une partie de $\mathbb{N}$.

Notations

- Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.

Notations

- Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
- Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.

Notations

- Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
- Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
- La suite d est de **terme général** d_n.

Notations

- Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
- Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
- La suite d est de **terme général** d_n.
- Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).

Notations

- Au lieu d'utiliser la notation habituelle $d(n)$ pour désigner l'image de n, on utilise souvent d_n.
- Dans notre exemple, $d_n = 10n$, quelque soit l'entier naturel n.
- La suite d est de **terme général** d_n.
- Au lieu de d, on désigne aussi la suite par $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou même plus simplement (d_n).
- On appelle d_n le **terme d'indice** n ou encore le **terme de rang** n.

DANGER !

Il ne faudra pas confondre le **nombre** d_n avec la **suite** (c'est-à-dire fonction) (d_n)...

Sommaire

Définition (suite définie explicitement)

Soit D une partie de $\mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur n. Soit u une suite telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in D$. On dit alors que u est définie explicitement.

Exemple

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

Exemple

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

Exemple

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2}$.

On obtient par exemple $u_1 = 2 - 1 = 1$, $u_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $u_{10} = 2 - \frac{1}{100} = \frac{199}{100}$

Sommaire

Définition (suite définie par une relation de récurrence)

C'est une suite dont on connaît le(s) premier(s) terme(s) et dont un terme quelconque est défini en fonction des termes précédents.

Exemple

Soit s la suite définie par :

$$s \ : \ \begin{cases} s_0 = 1 \\ \text{pour tout} \ \ \text{ntier } n \geqslant 1, \ s_n = 1 + \frac{1}{s_{n-1}} \end{cases}$$

Calculez les valeurs approchées à 10^{-4} près des 10 premiers termes de la suite.

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice

- On commence par entrer le premier terme : $\boxed{1}$ $\boxed{\text{EXE}}$

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice

- On commence par entrer le premier terme : 1 EXE
- Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice

- On commence par entrer le premier terme : 1 EXE
- Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :

utilisation de la touche [Ans] de la calculatrice

- On commence par entrer le premier terme : 1 EXE
- Ensuite, on utilise la touche [Ans] qui récupère le dernier résultat donné par la machine, c'est-à-dire ici 1 :

  1 + 1 ÷ [Ans] EXE
- ensuite, on tape sur EXE pour obtenir les termes suivants.

Algo au Bac

```
Algorithme Suite récurrente version Bac :/
Variable
  n, k : entier
  S : flottant
Début
  Afficher("valeur de n ?")
  Lire(n)
  S ← 1
  Pour k de 1 à n Faire
    S ← 1 + 1/S
  FinPour
  Afficher(S)
Fin
```

Algo au Bac

```
Fonction s(n : entier) : flottant
Variable
  | k : entier
  | S : flottant
Début
  | S ← 1
  | Pour k de 1 à n Faire
  |   | S ← 1 + 1/S
  | FinPour
  | Retourner S
Fin
```

Python

```
def s0(n):
    s = 1
    for k in range(1,n):
        s = 1 + 1/s
    return s
```

```
In [23]: [s(k) for k in range(1,10)]
Out[23]:
[1,
 2.0,
 1.5,
 1.6666666666666665,
 1.6,
 1.625,
 1.6153846153846154,
 1.619047619047619,
 1.6176470588235294]
```

```
In [24]: [s(k) for k in range(100,110)]
Out[24]:
[1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895,
 1.618033988749895]
```

Sommaire

Définition (suite arithmétique)

Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Théorème (expression explicite du terme général d'une suite arithmétique)

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme a_0 et de raison r si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

Théorème (somme des n premiers entiers naturels)

La somme des entiers de 1 à n, notée $\sum_{k=1}^{n} k$*, est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$

Théorème (somme des premiers termes d'une suite arithmétique)

Étant donné une suite arithmétique a de raison r

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{\textit{nombre de termes} \times (\textit{1er terme} + \textit{dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2}$$

Sommaire

Définition (suite géométrique)

Une suite (g_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} = q \cdot g_n$$

On appelle q la raison de la suite.

Théorème (expression explicite du terme général d'une suite géométrique)

Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme g_0 et de raison q si, et seulement si, pour tout entier naturel n,

$$g_n = g_0 \cdot q^n$$

Théorème (somme des premiers termes d'une suite géométrique)

$$Si\ q \neq 1,\ \sum_{k=0}^{n} g_k = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison} = g_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Sommaire

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;

Définition

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est :

- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Recherche

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Étudier les variations de $(u_n)_{n \geq 0}$

Recherche

Étudier le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Théorème

Soit u une suite à TERMES STRICTEMENT POSITIFS. Alors :

Théorème

Soit u une suite à TERMES STRICTEMENT POSITIFS. Alors :

- *la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;*

Théorème

Soit u une suite à TERMES STRICTEMENT POSITIFS. Alors :

- *la suite u est strictement croissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;
- *la suite u est strictement décroissante si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Définition

Une suite **u** est **majorée** si, et seulement si, pour tout entier n, il existe un réel M tel que $u_n \leqslant M$.
Une suite **u** est **minorée** si, et seulement si, pour tout entier n, il existe un réel m tel que $u_n \geqslant m$.
Une suite **u** est **bornée** si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

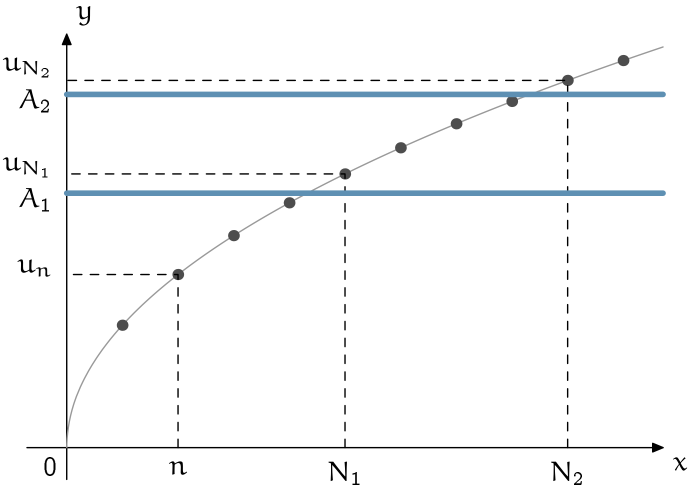
Sommaire

Sommaire

Définition (Suite divergeant vers l'infini)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe **un** entier N tel que **pour tout** entier n supérieur à N, on a $u_n > A$. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$


y
u_{N_2}
A_2
u_{N_1}
A_1
u_n
0
n
N_1
N_2
x

Recherche

Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 5n^2$.

Recherche

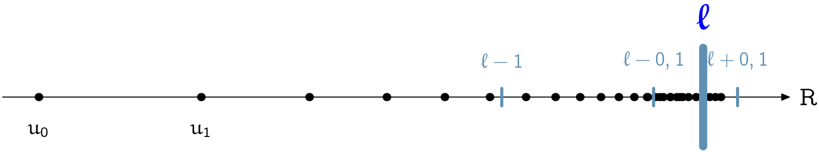
Quelle pourrait être la définition d'une suite divergeant vers $-\infty$?...Il y a plusieurs possibilités.

Sommaire

Définition (Suite convergente)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$


ℓ
$\ell - 1$
$\ell - 0,1$
$\ell + 0,1$
$\mathbb{R}$
u_0
u_1

Recherche

Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Recherche

Est-ce que toutes les suites admettent une limite, finie ou infinie ?

Sommaire

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !

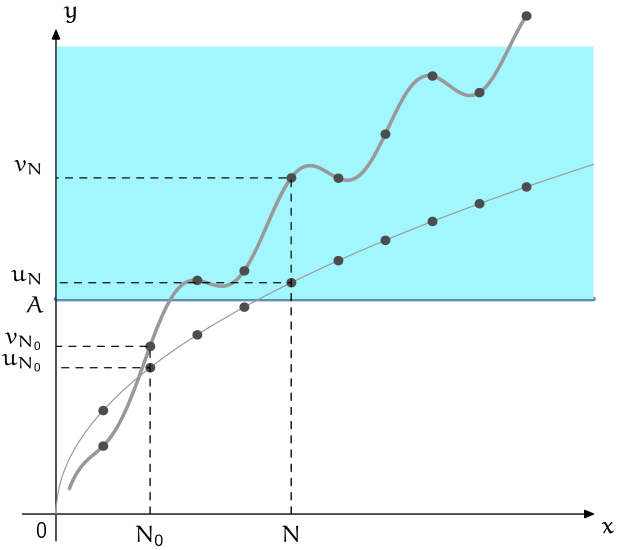
Recherche

Téhessix : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver le *contre-exemple*.

Sommaire

Sommaire


y
v_N
u_N
A
v_{N_0}
u_{N_0}
0
N_0
N
x

Théorème (Théorème de comparaison (ROC))

Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

Théorème (Théorème de comparaison (ROC))

Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Théorème (Théorème de comparaison (ROC))

Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- *Il existe un entier* N_0 *tel que pour tout entier* $n \geqslant N_0$ *on a* $v_n \geqslant u_n$

Théorème (Théorème de comparaison (ROC))

Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- *Il existe un entier* N_0 *tel que pour tout entier* $n \geqslant N_0$ *on a* $v_n \geqslant u_n$

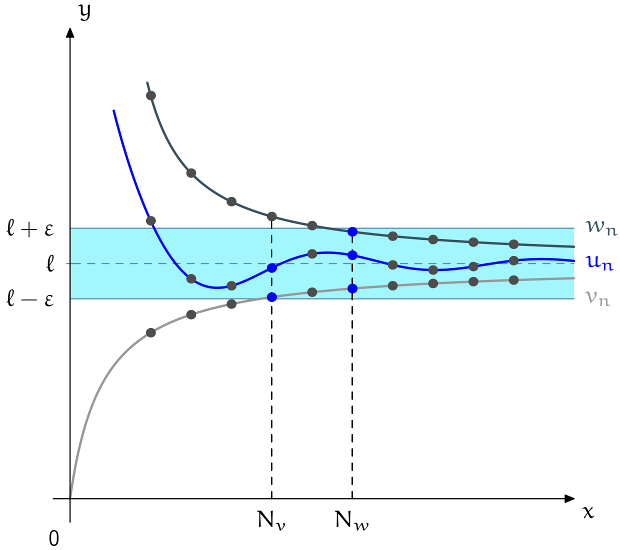
Théorème (Théorème de comparaison (ROC))

Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- *Il existe un entier* N_0 *tel que pour tout entier* $n \geqslant N_0$ *on a* $v_n \geqslant u_n$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Sommaire


y
ℓ + ε
ℓ
ℓ − ε
w_n
u_n
v_n
0
N_v
N_w
x

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *trois suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *trois suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *trois suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$
- *Il existe un entier* N *tel que pour tout entier* $n \geqslant N$ *on a* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *trois suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$
- *Il existe un entier* N *tel que pour tout entier* $n \geqslant N$ *on a* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soit $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *trois suites définies sur* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
- *Il existe un entier* N *tel que pour tout entier* $n \geqslant N$ *on a* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Sommaire