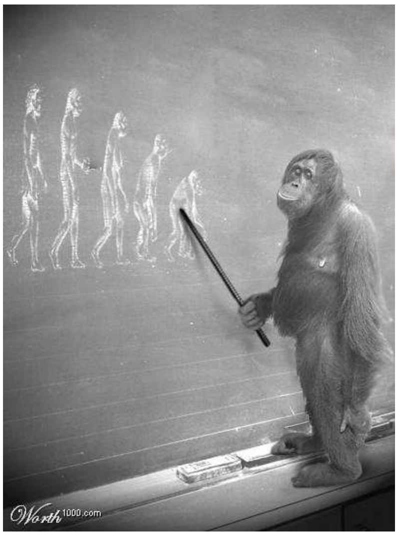
Première Aventure

LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE



Résumé Aujourd'hui, notre héros débute sa formation de chevalier Mataïe auprès de son maître Dark Mathemator en abordant la délicate étude des suites numériques...

A - DÉFINITION DE LA CONVERGENCE

A - 1 : Qu'est-ce qu'une suite ?

Mathémator : Question idiote n'est-ce pas?
Téhessix[1] : Ben justement, j'ai un mauvais souvenir à propos des suites. C'est avec des n. Par exemple on a $u_n = \sqrt{2n+1}$

Mathémator : C'est tout ? Je vois...L'année de formation qui nous attend ne sera pas superflue. Si vous avez éprouvé des difficultés l'an passé, c'est peut-être que vous n'avez pas fait l'effort d'avoir en tête une définition claire, précise, rigoureuse. Peut-être n'avez-vous pas compris comment cette définition pouvait être liée aux diverses propriétés, à quoi tout le tralala pouvait servir, comment cette partie du programme pouvait être reliée à d'autres notions déjà étudiées. Vous ne semblez pas avoir une vision intuitive de la notion susceptible de vous aider à comprendre comment tout s'imbrique si merveilleusement dans notre magnifique univers mathématique à l'esthétique si parfaite. Pourquoi cette notion est-elle apparue ? Quelle est sa place dans l'histoire de l'esprit humain ? Quelles sont ses applications concrètes ? C'est avec ces questions en tête que nous essaierons d'aborder toutes les notions qu'un(e) jeune Mataïe se doit de maîtriser à l'issue de sa formation terminale.
Téhessin (à part) : À ce rythme là, dans deux ans on y est encore, et moi j'ai d'autres projets.

Mathémator : Vous dîtes ?

Téhessin : J'ai hâte d'étancher ma soif de connaissance, ô céleste maître.

Mathémator : À la bonne heure ! Pour faire court et rigoureux, on pourrait dire que

Définition
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$

1. Si notre héros est un garçon, c'est pour faciliter les accords des adjectifs et participe passé.

Qu'est-ce que ça vous inspire ?

Téhessin : Ben que deux mois de vacances c'est court, mais c'est suffisant pour rester perplexe face à un tel énoncé.

Mathémator : Reprenons votre exemple initial.

La suite u qu'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$[2] ou même (u_n) est la fonction qui, à n'importe quel **entier** n associe le **réel** $\sqrt{2n+1}$

Téhessin : Si c'est juste une fonction, pourquoi avoir fait un chapitre spécial dessus ? Pourquoi lui avoir donné un nom spécial ? Pourquoi avoir utilisé une notation spéciale ? On pourrait noter $u(x) = \sqrt{2x+1}$ et voilà le travail, pas besoin de se prendre la tête. **(à part)** : les maths c'est vraiment pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué.

Mathémator : Essayons de répondre à vos questions. Enfilons une blouse : et hop ! Nous voici devenus physiciens.

Laissons tomber votre téléphone portable dans un tube où nous avons au préalable fait le vide. Notons sa position chaque seconde :

$$\begin{aligned} h_0 &= 0m \\ h_1 &= 4{,}9m \\ h_2 &= 19{,}6m \\ h_3 &= 44{,}1m \\ h_4 &= 78{,}4m \end{aligned}$$

Après avoir reçu une pomme sur la tête, nous remarquons que

$$h_n \simeq \frac{1}{2}gn^2$$

avec $g \simeq 9{,}81ms^{-2}$ et n le *rang* de la mesure correspondant ici au nombre de secondes écoulées depuis le début de la chute.

Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de mesures qui est en fait une suite numérique de *terme général* $h_n = 4{,}9n^2$.

Téhessin : Il aurait été plus simple de noter $h(t) = 4{,}9t^2$ avec t le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres.

Mathémator : Attention ! Nous avons pris des mesures chaque seconde. Rien ne nous dit qu'entre chaque mesure il ne se passe pas des choses extrèmement bizarres. Bien sûr le physicien généralisera le résultat à n'importe quelle valeur de t, entière ou non, car il a en poche des lois qui le lui permettent : il passe naturellement du *discret* au *continu*[3].

Hors d'un contexte physique, un mathématicien aura besoin d'être convaincu avant de pouvoir généraliser

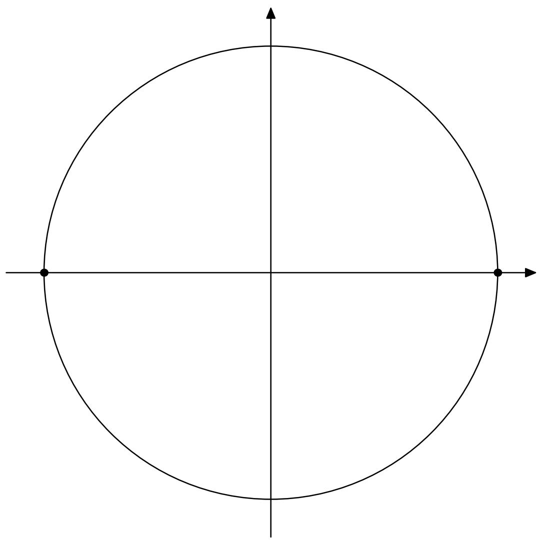
Considérez par exemple la suite de terme général

$$u_n = \sin(n\pi)$$

2. c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par u_n quand n *décrit* l'ensemble $\mathbb{N}$ qu'on pourrait aussi noter $\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{1000},\cdots,u_{197895},\cdots\}$: on identifie ici la fonction et les valeurs qu'elle prend, ce qui se comprend car on peut « énumérer » ces valeurs

3. Ce passage du discret au continu est l'un des points forts de votre formation : nous en reparlerons tout au long de l'année, notamment au moment de la découverte du calcul intégral et des lois de probabilité à densité.

Téhessin : Pour la trigo, un petit dessin :



En fait, u_n est toujours nul.

Mathémator : Considérez maintenant la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = \sin(t\pi)$...

Téhessin : ...OK, je vois : par exemple $f(1/2) = \sin(\pi/2) = 1$ donc la fonction f n'est pas nulle partout en fait.

Mathémator : Imaginez un physicien prenant chaque seconde des mesures d'un phénomène obéissant à cette loi [4]: il pourrait conclure qu'après avoir jeté un portable dans l'eau, la surface reste immobile...
Pour en revenir à nos moutons, une suite numérique peut apparaître comme une « suite de mesures » à intervalle de temps régulier : garder cette image en tête pourra peut-être vous aider à mieux appréhender l'étude des suites, et l'étude des suites devrait elle-même vous aider à appréhender les propriétés des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
De manière plus abstraite, on peut aussi considérer une suite numérique comme un classement de nombres réels : on prend des réels et on leur colle un dossard.
Considérons par exemple la suite des entiers pairs :
0 a le dossard n°0
2 a le dossard n°1
4 a le dossard n°2
6 a le dossard n°3 etc.
ce qui revient à étudier la suite p_n de terme général $p_n = 2n$.

Téhessin : Oui mais si on prend la suite $u_n = \sin(n\pi)$

Mathémator : Effectivement, le pauvre 0 va se retrouver avec une infinité de dossards...Voici un écueil fréquemment rencontré par les valeureux pédagogues cherchant un support intuitif concret à une notion mathématique abstraite : ça peut aider, mais il faut être conscient des limites. D'ailleurs, en parlant de ça...

A - 2 : Comment traduire qu'une suite diverge vers l'infini ?

Mathémator : Retrouvons notre portable en chute libre. Où en est-il depuis tout à l'heure?

Téhessin : Ben il s'est lamentablement écrasé.

Mathémator : Mouais, alors imaginons un très grand tube.

Téhessin : Je veux bien, mais s'il est trop grand, g va varier.

Mathémator : Et le portable risque d'être plus attiré par la Lune que par la Terre et se mettre à remonter. Encore une des limites des illustrations physiques d'un phénomène mathématique : pour aborder l'infini, il nous faut quitter le vulgaire monde physique.

4. par exemple une onde se propageant à la surface de l'eau

Considérons la suite de terme général $h_n = 5n^2$. Y a-t-il une valeur que h_n ne puisse dépasser ? Disons un milliard pour se fixer les idées. Et d'abord, comment traduire ce problème mathématiquement ?

Téhessin : Bon, disons que « h_n plus grand qu'un milliard » revient à résoudre l'inéquation $h_n \geqslant 10^9$.

Mathémator : Continuez ! Par commodité, appelez (I) cette inéquation.

Téhessin :

$$(I) \iff 5n^2 \geqslant 10^9$$
$$(I) \iff n^2 \geqslant 2 \times 10^8$$
$$(I) \iff n \geqslant \sqrt{2} \times 10^4 \text{ car } n \text{ est positif}$$

donc d'après ma machine, il suffit d'attendre un peu moins de quatre heures.

Mathémator : Je vous l'accorde. En fait, il semble qu'avec un peu de patience, il n'y ait pas valeur que h_n ne puisse dépasser. Comment l'interpréter ?

Téhessin : J'ai vu ça l'année dernière : on dit que h_n tend vers $+\infty$.

Mathémator : Attention mon petit Téhessin : parlez-vous du réel h_n ou de la suite (*i.e.* la fonction) (h_n) ?

Téhessin (à part) : Comment peut-il faire la différence à l'oreille ? Il se fiche de moi

Mathémator : Le *réel* h_n est fixe : il ne varie pas .

Téhessin (à part) : Chuis pas demeuré non plus.

Mathémator : La *suite* (h_n) varie en fonction de n : c'est elle qui tend vers $+\infty$.
Le problème maintenant, c'est : comment le prouver ?

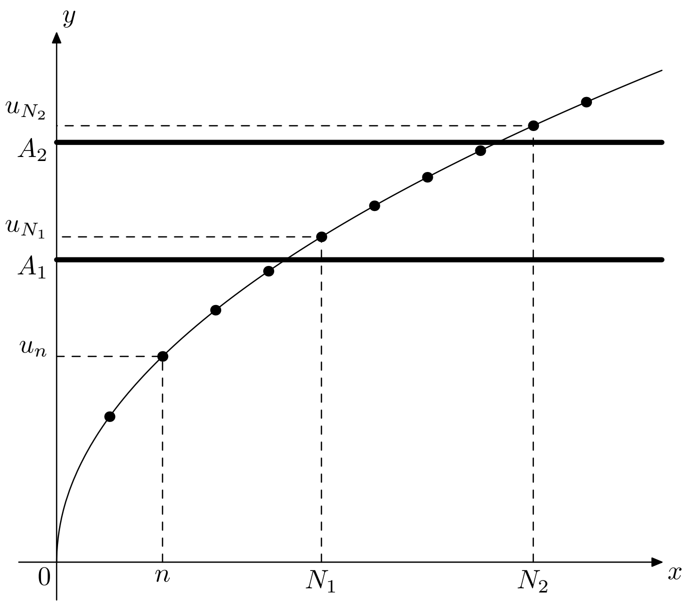
Téhessin : ...

Mathémator : Comme vous dîtes. L'ennui, c'est que nous n'avons pas de définition mathématique du fait qu'une suite tende vers $+\infty$. Qu'à cela ne tienne ! Donnons-en une :

Définition
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe ***un*** *entier N tel que* ***pour tout*** *entier n supérieur à N, on a $u_n > A$.*

Téhessin (à part) : C'est sûr qu'on est vachement avancé avec son charabia **(tout haut) :** votre définition me laisse perplexe...

Mathémator : Toi yen a pas comprendre ? Bon, ça veut seulement dire que, quelque soit la hauteur A de la barre, si on attend N secondes, on est sûr que les termes de la suite seront toujours au-dessus de A



Remarquez bien que le temps d'attente N dépend de la hauteur A que l'on veut dépasser.

Téhessin : Oui mais concrètement, comment peut-on peut-on appliquer ça à (h_n) ?

Mathémator : Nous atteignons la conclusion de notre réflexion : la mise en forme rigoureuse de notre première intuition après s'être mis d'accord sur un point de départ, la définition.

Considérons donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $h_n = 5n^2$.
Soit A un réel positif quelconque. Nous voudrions savoir s'il existe un rang N à partir duquel les valeurs prises par la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *toujours* supérieures à A.
Il s'agit donc de résoudre **dans** $\mathbb{N}$ l'inéquation

$$\begin{aligned}
&(I) :\ 5n^2 \geqslant A\\
&(I) \iff n^2 \geqslant A/5\\
&(I) \iff n \geqslant \sqrt{A/5} \text{ car } A \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc, dès que n sera supérieur à $\sqrt{A/5}$, on aura h_n supérieur à A. Donc, d'après notre définition, on peut dire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Téhessin : Et si je comprend bien, ici le N est égal à $\sqrt{A/5}$.

Mathémator : Mouais, enfin presque : $\sqrt{A/5}$ n'a aucune raison d'être un entier ! N est en fait le premier entier supérieur à $\sqrt{A/5}$.

Téhessin : Ouh la ! Une petite pause s'impose.

Mathémator : Surtout en sachant ce qui nous attend.

A - 3 : Comment traduire qu'une suite converge vers 92 ?

Mathémator : Bon, enfilons notre bleu de chauffe et ouvrons le capot moteur de votre 309 customisée. Plongez votre portable dans le carter d'huile : grâce à ses fonctions thermomètre et chronomètre, vous allez pouvoir relever la température de l'huile toutes les 30 secondes.

Téhessin : OK, ça roule.

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 60°C\\
\theta_1 &\simeq 83°C\\
\theta_2 &\simeq 86°C\\
\theta_3 &\simeq 88°C\\
\theta_{10} &\simeq 90{,}5°C\\
\theta_{20} &\simeq 91{,}2°C\\
\theta_{30} &\simeq 91{,}5°C\\
\theta_{100} &\simeq 91{,}9°C\\
\theta_{200} &\simeq 91{,}92°C\\
\theta_{1\,000} &\simeq 91{,}99°C\\
\theta_{10\,000} &\simeq 91{,}999°C
\end{aligned}$$

Il semble que la température de l'huile se stabilise[5] autour de 92°C

Mathémator : Un physicien dirait qu'on atteint un régime permanent, la température limite valant 92°C.

Quittons nos bleus et grimpons en haut de l'Olympe mathématique. Pour les dieux que nous sommes, le temps s'écoule à l'infini : 5 minutes, 10 ans, 1 milliard d'années-lumière ne représentent rien si ce n'est un début de commencement.

5. Téhessin est très patient

Considérez la suite de terme général $t_n = 32\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} + 60$.

Téhessin : Je calcule les premiers termes et miracle, on retrouve les résultats de l'expérience, donc la suite tend vers 92.

Mathémator : Pauvre Téhessin. Vous regardez encore le monde avec vos yeux de pauvre mortel : qui vous dit qu'après $10^{10^{10}}$ calculs, $t_{10^{10^{10}}}$ ne se mette pas à s'éloigner de 92 ? Comme le disait mon maître Marcel : « ne demande pas à la chenille de comprendre le vol du papillon ».

Téhessin (à part) : Moi aussi j'en connais : « si ma tante en avait...» **(tout haut) :** Je ne saisis pas bien le rapport.

Mathémator : Élémentaire ! Ce qui est vrai au départ peut s'avérer faux par la suite : un état qui nous semble stationnaire peut subitement se mettre à varier fortement.
Un exemple : étudiez la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = \frac{30^n}{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}$$

Téhessin : Je tapote et j'obtiens $u_5 \simeq 2 \times 10^6$, $u_{10} \simeq 2 \times 10^8$, $u_{15} \simeq 10^{10}$: bon, je pense que cette suite tend vers $+\infty$, mais votre petit sourire me dit qu'il y a un vice caché.

Mathémator : Bien joué Callaghan ! Vous essaierez dans la douce quiétude de votre bureau de montrer que la suite croît jusqu'à u_{30} puis décroît et même que $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$ pour $n \geqslant 59$ ce qui nous permettra bientôt de montrer que la suite converge en fait vers 0.
Imaginons maintenant qu'un physicien effectue une suite de mesures, la $n^{\text{ième}}$ mesure étant u_n. S'il se limitait aux 15 premières mesures, il constaterait que les résultats sont de plus en plus grands et il pourrait penser que cela va continuer. Il obtiendrait alors une conclusion opposée à celle du mathématicien : la suite n'a pas de limite finie.

Les deux raisonnements correspondent à deux visions des choses différentes. Pour un mathématicien, la notion de convergence d'une suite ne dépend pas des p premiers termes, même si p est très grand : le mathématicien contemple l'infini. Alors que le physicien qui se livre à des observations ne peut s'appuyer que sur un nombre fini d'entre elles, et les premiers termes sont donc importants pour lui.

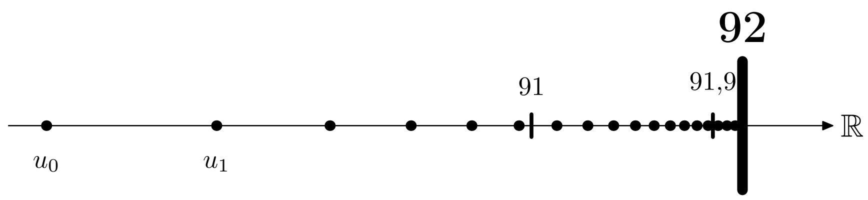
Ceci dit, on peut quand même utiliser des suites pour modéliser certains phénomènes à temps discrets. Tout ne se passe pas toujours aussi mal que dans l'exemple précédent qui avait été « choisi pour ». Le physicien peut également utiliser des suites dans d'autres circonstances que celles d'une suite de mesures temporelles et sa conception de la limite peut alors rejoindre celle du mathématicien. Cela peut se produire lorsqu'il discrétise l'espace, c'est-à-dire lorsqu'il l'assimile à un ensemble fini de points uniformément répartis (un maillage), ce qui permet dans certains cas de simplifier des calculs. En faisant tendre le nombre de points vers l'infini, on espère que les résultats obtenus comme limites des résultats sur l'espace discrétisé seront valables pour l'espace continu, if you see what I mean.

Téhessin : Ouh ouh, on redescend sur Terre s'il vous plaît...

Mathémator : Ah euh oui oui, bon : comment formuler autrement que les valeurs prises par $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapprochent inexorablement de 92 ?

Téhessin : Vous en avez de bonnes. Chais pas moi, en disant qu'elles ne s'en éloignent pas.

Mathémator : Bingo ! Voilà l'idée. Enfin presque. Par exemple, se rapprocher de 92°C, c'est dire qu'à partir d'un certain rang (d'un certain moment), toutes les températures mesurées seront à moins d'un degré de la température limite : bref, toutes les valeurs sont à moins d'un degré de 92°C *sauf un nombre fini de valeurs* plus éloignées.
On pourrait d'ailleurs tenir le même raisonnement en remplaçant 1°C par 0,1°C ou encore $10^{-32}{}^\circ C$



Le problème est de traduire algébriquement ces notions de distance : les intervalles peuvent nous aider.

> **Définition**
> *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi* ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***

Téhessin : Je ne vois pas trop comment appliquer concrètement cette définition.

Mathémator : Prenons un exemple simple : la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Téhessin : $v_1 = 2$, $v_2 = 3/2$, $v_{100} = 1{,}01$, $v_{10\,000} = 1{,}0001$: la suite semble converger vers 1.

Mathémator : Prenons un intervalle centré en 1 : il est de la forme $]1-\varepsilon\,;\,1+\varepsilon[$
Résolvons alors

$$
\begin{aligned}
&(I_n):\ 1-\varepsilon < v_n < 1+\varepsilon\\
&(I_n) \Longleftrightarrow 1-\varepsilon < 1+1/n < 1+\varepsilon\\
&(I_n) \Longleftrightarrow -\varepsilon < 1/n < \varepsilon\\
&(I_n) \Longleftrightarrow 0 < 1/n < \varepsilon \text{ car } n \text{ est strictement positif}\\
&(I_n) \Longleftrightarrow n > 1/\varepsilon
\end{aligned}
$$

Donc, quelque soit ε, c'est à dire quelque soit l'intervalle ouvert centré en 1, tous les termes v_n de la suite seront dans l'intervalle dès que n est supérieur à $1/\varepsilon$.

B - PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES LIMITES

Mathémator : Vous avez vu l'an passé un certain nombre de propriétés sur les limites qui vont en fait s'avérer des outils indispensables pour résoudre les exercices, le retour à la définition s'avérant souvent fastidieux.

B - 1 : Comment démontrer les propriétés sur les limites des suites à partir des définitions des limites ?

Téhessin : L'année dernière, on n'avait démontré aucune de ces propriétés.

Mathémator : C'est parce que vous ne disposiez pas encore des définitions des limites. Mais, maintenant, nous pouvons pratiquement toutes les démontrer :

- limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites admettant des limites finies ou non, en dehors des cas où apparaît une des formes indéterminées $+\infty-\infty$, $\infty\times 0$, $0/0$ ou ∞/∞ ;
- théorème des gendarmes ;
- si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$;
- passage à la limite dans une inégalité ;
- toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;
- si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$, etc.

Téhessin : Et le fait que toute suite croissante et majorée est convergente ?

Mathémator : Justement, on ne peut pas encore le démontrer, pas plus que le fait que toute suite suite décroissante et minorée est convergente. Car les preuves de ces deux propriétés sont très particulières, et vous ne les ferez qu'une fois votre Bac en poche.

Maintenant, pour que vous voyez les définitions des limites à l'œuvre, je vais vous exposer deux preuves en détails.

Propriété
Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors $(1/u_n)$ tend vers 0.

Pour montrer que $(1/u_n)$ tend vers 0, on applique la méthode vue dans la partie précédente. On fixe d'abord ε en écrivant « Soit $\varepsilon > 0$ », et on cherche un indice N à partir duquel $1/u_n \in]-\varepsilon,\varepsilon[$. On écrit maintenant l'hypothèse Quelque soit $A > 0$, il existe un rang M tel que, pour tout $n \geqslant M$, $u_n \in]A,+\infty[$
On doit maintenant choisir avec quelle valeur de A l'utiliser. Pour que $1/u_n$ appartienne à $]-\varepsilon,\varepsilon[$, il suffit que u_n soit supérieur à $1/\varepsilon$. On décide donc d'utiliser l'hypothèse avec $A = 1/\varepsilon$, ce qui est possible puisque ε est fixé. On pose alors N égal au M correspondant à $A = 1/\varepsilon$. Pour $n \geqslant N$, on a donc $u_n \geqslant 1/\varepsilon$, d'où $1/u_n \leqslant \varepsilon$ et donc $1/u_n \in]-\varepsilon,\varepsilon[$. Nous avons trouvé un N convenable pour le ε que nous nous étions fixé, et comme nous avions choisi ε strictement positif quelconque, le résultat est démontré. Passons maintenant au deuxième exemple.

Théorème des gendarmes
On suppose que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n, et que (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ. Alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

Comme précédemment, on commence par « Soit $\varepsilon > 0$ », et on cherche un indice N à partir duquel $\ell-\varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell+\varepsilon$. Cette fois-ci, on écrit les hypothèses

Pour tout $\alpha > 0$ il existe un rang M_α à partir duquel tous les termes de la suite vérifient $\ell-\alpha \leqslant u_n \leqslant \ell+\alpha$,
Pour tout $\beta > 0$ il existe un rang P_β à partir duquel tous les termes de la suite vérifient $\ell-\beta \leqslant w_n \leqslant \ell+\beta$

et le problème est de savoir pour quelles valeurs de α et de β nous allons utiliser ces hypothèses. Pour que v_n soit supérieur à $l-\varepsilon$, il suffit que u_n soit supérieur à $\ell-\varepsilon$ puisque $v_n \geqslant u_n$, donc il suffit que n soit supérieur à M_ε. De même, pour que v_n soit inférieur à $\ell+\varepsilon$, il suffit que w_n soit inférieur à $\ell+\varepsilon$ puisque $v_n \leqslant w_n$, donc il suffit que n soit supérieur à P_ε. On applique donc les hypothèses avec $\alpha = \varepsilon$ et $\beta = \varepsilon$, et on pose $N = \max(M_\varepsilon,P_\varepsilon)$. Ainsi, si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant M_\varepsilon$ et $n \geqslant P_\varepsilon$, d'où $\ell-\varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell+\varepsilon$. Voilà !

Téhessin (à part) : Je commence à me demander si je ne ferais pas mieux d'aller jouer aux billes avec mon petit frère au lieu de vouloir devenir un Mataïe...

B - 2 : Comment montrer qu'une suite converge vers 32 ?

Téhessin (à part) : Qu'est-ce qui lui prend? On vient d'en parler

Mathémator : Je vois que vous trouvez cette question un peu curieuse. Il s'agit juste d'une manière de dire que l'on veut montrer que la suite converge alors que l'*on sait déjà quelle doit être sa limite*, par exemple 32. Il est effectivement fréquent que l'on ait *a priori* une idée de la valeur de la limite soit parce qu'on l'a devinée, soit parce qu'un énoncé a donné cette valeur. On a de plus étudié un problème similaire à l'aide de la définition : nous allons voir que dans la plupart des cas, on peut se contenter d'utiliser des propriétés déjà démontrées.

Commençons par une première transformation du problème. On préfère souvent avoir à montrer qu'une suite tend vers 0 plutôt que de montrer qu'elle tend vers 32. De plus, on préfère aussi travailler avec des nombres positifs parce qu'on voit mieux les choses et parce que les majorations sont plus faciles et moins dangereuses avec des nombres positifs. Pour toutes ces raisons, on utilise fréquemment que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 32 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - 32| = 0\cdot$$

On est donc ramené à montrer que $|u_n - 32|$ tend vers 0. Ensuite, il y a bien sûr plusieurs méthodes, mais une des plus courantes consiste à effectuer des majorations successives de $|u_n - 32|$, et ceci jusqu'à obtenir un majorant α_n dont on sait déjà qu'il tend vers 0,

$$|u_n - 32| \leqslant \cdots \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n\cdot$$

Puis on conclut grâce à la propriété suivante qui va nous permettre de résoudre de nombreux exercices :

Propriété
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite (α_n) qui converge vers 0 et telle que $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ à partir d'un certain rang. Alors (u_n) converge vers ℓ.

C'est en fait une conséquence directe du théorème des gendarmes, une fois que l'on a remarqué que $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ équivaut à $l - \alpha_n \leqslant u_n \leqslant l + \alpha_n$.

Par exemple, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on sait que $|\sin(n\theta)| \leqslant 1$, donc on a

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \left|\frac{\sin(n\theta)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, d'après la propriété précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = 0$.
Mais il se fait tard Téhessin : il est temps pour moi de me ressourcer en allant voir Lagaf à la télé.

Téhessin (à part) : Décidément, devenir un Mataïe n'est pas sans risque...

B - 3 : Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Considérez par exemple la suite de terme général $u_n = 32 - 1/n$.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers $+\infty$ est forcément croissante à partir d'un certain rang ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Considérez par exemple la suite de la bergère allant au marché de terme général $u_n = n + (-1)^{n+1} + 1$.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !
Considérez par exemple les suites de termes généraux $u_n = (-323)^n$ et $v_n = \sin n$.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver le *contre-exemple*.

C - EXERCICES

C - 1 : Avec les définitions.

Exercice I-1

On considère la suite définie par $u_n = 2 + 1/n$ pour $n \geqslant 1$

1) Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2) Observer la représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1{,}99; 2{,}01[$. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
4) On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon r , c'est-à-dire $]2-r, 2+r[$.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de r , tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à cet intervalle.
5) Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Exercice I-2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1) Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2) Observer la représentation graphique de la suite (u_n) donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite?
3) On considère l'intervalle $]a, +\infty[$ avec $a \geqslant 10$.
   Montrer que à partir d'un certain rang n_0 à déterminer en fonction de a, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.
4) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice I-3
Démontrez que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

C - 2 : Avec les propriétés.

Exercice I-4
Déterminez les limites des suites de termes généraux suivants :

$$u_n = \cos n - n \quad v_n = 2n + (-1)^n \quad a_n = \frac{\sin n}{n} \quad b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n \quad c_n = \frac{3-\cos n}{n}$$

Exercice I-5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$$

1) Conjecturez la limite de la suite à l'aide de la calculatrice

2) Montrez que $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+6/n}+1}$ et déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I-6

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

En déterminant le plus petit et le plus grand terme de s_n, montrez que

$$\frac{n}{n+1} \leqslant s_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+n}$$

et déduisez-en la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I-7 Style Bac avec ROC

Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) une suite. On considère les propriétés suivantes

- P_1 la suite (u_n) est majorée ;
- P_2 la suite (u_n) n'est pas majorée;
- P_3 la suite (u_n) converge;
- P_4 la suite (u_n) tend vers $+$;
- P_5 la suite (u_n) est croissante.

1) Donner la traduction mathématique des propriétés P_1 et P_4.
2) Si les propriétés P_1 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
3) Si les propriétés P_2 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (on ne demande pas de justifier la réponse) ?
4) Une suite vérifiant la propriété P_4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_2 (on demande de justifier la réponse) ?
5) Une suite vérifiant la propriété P_2 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_4 (on demande de justifier la réponse) ?

Exercice I-8 Encore un

Partie A Démonstration de cours

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1) Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geqslant M$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant M$.
2) Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3) Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.

Partie B

Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant chaque réponse :
a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice I-9 Et un autre

Partie I
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :
(A) Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier n, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.
(B) Toute suite bornée est convergente.
(C) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.
(D) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Partie II
Pour chacune des propositions de la première partie, justifier votre réponse :

- dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
- dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

Exercice I-10

Soient $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$$

Montrez que la suite diverge vers $+\infty$.

Étudiez le signe des termes puis le sens de variation de la suite

Exercice I-11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^2 + u_nv_n + v_n^2) = 0$.
Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Mettez $X^2 + X + 1$ sous forme canonique

Exercice I-12

Soit a et b deux réels strictement positifs. Étudiez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

Si a et b sont distincts, l'un est supérieur à l'autre

Exercice I-13 Vrai ou Faux ?

1) Si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.
2) Si une suite diverge, alors elle n'est pas bornée.
3) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.
4) Une suite qui diverge vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice I-14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

1) Déterminez à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de S_{50} à la précision 10^{-2}.

2) Démontrez que (S_n) converge vers une limite que l'on pécisera.
3) Étudiez la convergence de la suite (nS_n).

On minore une somme par n fois le plus petit terme, on la majore par n fois le plus grand

Exercice I-15

Étudier la suite de terme général $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$.

Montrez qu'elle est croissante et majorée

Exercice I-16 QCM

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions posées sont indépendantes.
Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher **au plus deux cases** (celles qu'il juge correctes). Aucune justification n'est demandée.
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Chaque réponse exacte rapporte la moitié des points affectés ; chaque réponse fausse enlève le quart des points affectés. Cocher trois cases ou plus à une question, ou n'en cocher aucune, rapporte zéro point à cette question.
Si, par aplication de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.
On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $(u_n) \leqslant (v_n) \leqslant (w_n)$ ».

1) Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :
☐ La suite (w_n) tend vers $-\infty$
☐ la suite (u_n) est majorée
☐ la suite (u_n) tend vers $-\infty$
☐ la suite (w_n) n'a pas de limite.
2) Si $(u_n) \geqslant 1$, $(w_n) = 2\,(u_n)$ et $\lim\,(u_n) = l$, alors
☐ $\lim\,(v_n) = l$
☐ La suite (w_n) tend vers $+\infty$
☐ $\lim(w_n - u_n) = l$
☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
3) Si $lim\,(u_n) = -2$ et $\lim\,(w_n) = 2$, alors :
☐ La suite (v_n) est majorée
☐ $\lim\,(v_n) = 0$
☐ la suite (v_n) n'a pas de limite
☐ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.
4) Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :
☐ $\lim\,(w_n) = 0$
☐ $\lim\,(v_n) = 2$
☐ $\lim\,(u_n) = 2$
☐ la suite (v_n) n'a pas de limite.