DIX-HUITIÈME LEÇON

LOIS CONTINUES

I - Préambule : le charme discret du continu

Mathémator : Nous allons être amenés à distinguer les variables aléatoires [a] *discrètes* et les variables aléatoires *continues*. Une variable discrète prend des valeurs dans un ensemble discret, c'est à dire « qu'on peut dénombrer ».

Téhessin : Pouvez-vous être plus explicite ?

Mathémator : Premier cas : la variable prend un nombre fini de valeurs. Considérez par exemple un jeu de pile ou face et la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on obtient pile et la valeur 0 si on obtient face. C'est une valeur discrète : elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$.
Deuxième cas : la variable prend ses valeurs dans un ensemble infini, mais dont on peut lister les éléments, leur attribuer un rang. On peut donc écrire ces valeurs sous la forme $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$. L'ensemble discret le plus « naturel » est l'ensemble $\mathbb{N}$: $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3\cdots$. En connaissez vous d'autres ?

Téhessin : Tout simplement des parties de $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers pairs, des entiers multiples de 32 etc.

Mathémator : En effet, il y a le premier entier pair, le deuxième, etc. Tiens, pour rigoler : y a-t-il plus d'entiers que de multiples de 32 ?

Téhessin : Oui, évidemment, pourquoi cette question ?

Mathémator : Parce que la réponse n'est pas aussi évidente. En effet, chaque multiple de 32 peut être mis en correspondance avec chacun des éléments de $\mathbb{N}$: $v_1 = 32, v_2 = 64, \cdots, v_n = 32n, \cdots$. Il y aurait donc « autant » d'entiers multiples de 32 que d'entiers tout court ! Plus fort : on peut aussi montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et donc qu'il y a « autant » de rationnels que d'entiers, alors qu'on vous a appris que l'ensemble $\mathbb{N}$ était strictement inclus dans $\mathbb{Q}$! Mais nous abordons des notions extrêmement complexes qui débordent largement notre cours.

Téhessin : Dans ces conditions, je suppose qu'il y a autant de nombres réels que d'entiers et donc tout ensemble est dénombrable : il y a le premier réel, puis le deuxième, etc.

Mathémator : Bon, je suis allé trop vite et de manière trop vague. J'ai précisé qu'on pouvait montrer que $\mathbb{Q}$ était dénombrable. Eh bien allons-y ! L'idée est toute simple : un rationnel peut être représenté par un couple d'entier. Par exemple 2/3 sera représenté par le couple (2,3). Dans un repère du plan, un rationnel sera donc un point à coordonnées entière et $\mathbb{Q}$ sera représenté par l'ensemble des points à coordonnées entières. Prenez une feuille mon petit Téhessix et représentez quelques-uns de ces points. Et maintenant, un petit jeu qui me rappellera mes folles après-midis à dévorer Pif-gadget : reliez par un trait les points suivants

$$(0,0) - (1,0) - (0,1) - (0,2) - (1,1) - (2,0) - (3,0) - (2,1) - (1,2) - (0,3) - (0,4) - \cdots$$

Nous allons donc pouvoir « numéroter » chaque rationnel (1/2 porte par exemple le dossard 9) en prenant soin de « sauter » le couple $(2,4)$ par exemple car il représente le même rationnel que le couple $(1,2)$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ va donc pouvoir être mis en correspondance, terme à terme, avec l'ensemble $\mathbb{N}$, donc il y a « autant » de rationnels que d'entiers !

[a] N'oubliez pas qu'en probabilités, les variables sont des fonctions...

Téhessin : Excusez-moi, mais si 1/2 porte déjà le numéro 9, on risque de ne pas avoir assez d'entiers pour les numéroter tous.

Mathémator : N'oubliez pas cher disciple que nous avons une réserve *inépuisable* d'entiers. L'important, c'est d'avoir trouvé une correspondance terme à terme (une bijection) entre les deux ensembles.

Téhessin : Mais vous avez oublié les rationnels négatifs.

Mathémator : Un détail ! Il suffit d'intercaler l'opposé de chaque terme entre deux couples de notre suite :

$$(0,0)-(1,0)-(-1,0)-(0,1)-(0,-1)-(0,2)-(0,-2)-(1,1)-(-1,1)-(2,0)-(-2,0)-\cdots$$

Téhessin : Mais ce n'est qu'un dessin.

Mathémator : Effectivement, il reste à mettre tout ça en forme en introduisant une *bijection* bien choisie, mais le plus dur est fait : c'est Cantor qui a eu cette intuition à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. C'est encore à lui que nous devons une preuve que $\mathbb{R}$ n'est pas dénonbrable grâce au *raisonnement diagonal de ... Cantor*. Notre ami russo-dano-allemand[b] a prouvé que $\mathrm{J}=[0,1]$ n'était pas dénombrable de la manière suivante :
Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des points de J soit dénombrable. Il existe alors au moins une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant la propriété suivante : pour tout réel x deJ, il existe un entier n pour lequel $x=u_n$
Explicitons de la sorte la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0,u_{11}\,u_{12}\,u_{13}\,u_{14}\cdots u_{1n}\cdots\\
u_2 &= 0,u_{21}\,u_{22}\,u_{23}\,u_{24}\cdots u_{2n}\cdots\\
u_3 &= 0,u_{31}\,u_{32}\,u_{33}\,u_{34}\cdots u_{3n}\cdots\\
u_4 &= 0,u_{41}\,u_{42}\,u_{43}\,u_{44}\cdots u_{4n}\cdots\\
\vdots &= \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

La première décimale du premier terme est u_{11}, sa seconde décimale est u_{12}, ... La première décimale du second terme est u_{21}, sa seconde décimale est u_{22}, ... La première décimale du $n^{\text{ème}}$ terme est u_{n1}, sa seconde décimale est u_{n2}, ...
Considérons alors le réel x de l'intervalle J ainsi défini : $x=0,x_1x_2x_3\cdots x_n\cdots$ et la décimale x_i de rang i sera 1 si u_{ii} est différent de 1 et 2 dans le cas contraire.
Par conséquent, x ne peut égaler u_1 (il en diffère au moins par u_{11}), x ne peut égaler u_2 (il en diffère au moins par u_{22}), x ne peut égaler u_3 (il en diffère au moins par u_{33}),... : l'égalité $x=u_n$ n'a lieu pour aucun entier n, donc nous avons trouvé un élément de J...qui n'est pas dans J : belle contradiction. Notre supposition de départ est donc fausse et $[0,1]$ n'est pas dénombrable, donc a fortiori $\mathbb{R}$ non plus.

Téhessin : Tout ceci est passionnant, mais qu'est-ce que cela a affaire avec les probabilités ?

Mathémator : Et bien quand une variable prend ses valeurs dans un ensemble continu - $\mathbb{R}$ par exemple - on ne peut plus définir les probabilités comme dans le cas discret.

Téhessin : Je ne vois pas pourquoi.

Mathémator : Supposez que vous disposiez de 100 jetons identiques numérotés de 1 à 100 dans un sac opaque et que vous en tiriez un au hasard. La probabilité de tomber sur le jeton 32 est 1/100. Pouvez-vous maintenant, même en disposant d'un temps infini, inscrire tous les réels sur des jetons ?

Téhessin : Non, car nous venons de voir qu'on ne peut les numéroter.

Mathémator : Donc il faut procéder autrement. Par exemple, vous voulez mesurer la longueur de votre sabre laser. Même avec le meilleur instrument de mesure imaginable, vous n'obtiendrez qu'un *intervalle* dans lequel se situe le résultat exact (D'ailleurs, la probabilité pour que le résultat exact soit un nombre décimal est nulle (voir encadré)) (au cm près, au µm près, à l'Å près,...). De même, si vous demandez à votre calculatrice de vous donner un nombre réel au hasard dans $[0,1]$, elle se contentera de vous donner un intervalle.

Téhessin : Pourtant un nombre s'affiche.

Mathémator : Oui mais l'événement « obtenir 0.3232 sur l'écran de la calculatrice » est en fait l'événement « obtenir, lors du choix au hasard, un nombre situé dans l'intervalle $[0,32315\,;\,0,32325[$ ». De même qu'on peut penser que la « probabilité » (on ne l'a pas encore définie) de rencontrer une personne mesurant *exactement* 1,88m est nulle, et d'ailleurs vous vous en fichez, puisqu'il n'existe aucun moyen de vérifier quelle est exactement sa taille. En fait, la probabilité d'obtenir exactement 32 doit logiquement être nulle (Comme la définition de la page **??** le confirmera).

[b] Cantor a ensuite proposé l'hypothèse du continu en 1878 : il y a deux sortes de sous-ensembles infinis de $\mathbb{R}$: ceux qui sont en correspondance terme à terme avec $\mathbb{N}$ et ceux qui sont en correspondance terme à terme avec $\mathbb{R}$: il n'y aurait donc pas « d'infini intermédiaire » entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Ce résultat contribua a rendre fou ce génial mathématicien...

Téhessin : Ça me fait un peu penser à ce que j'ai entendu dire de la physique quantique : on peut prévoir où se trouve à peu près une particule élémentaire, mais on ne peut pas savoir exactement où elle se trouve à un moment donné.

Mathémator : En effet ! D'ailleurs, les notions mathématiques que nous abordons et les théories physiques que vous évoquez ont été développées presque simultanément. De plus, l'équation quantique par excellence, la fameuse *équation de Schrödinger*, fait en fait intervenir la densité de probabilité de présence de la particule au point considéré.

Incroyables réels : quelques quasi-paradoxes

Vous connaissez déjà des nombres réels particuliers : les entiers, les rationnels, les irrationnels. D'autres catégories (pouvant recouper les ensembles habituels) sont utilisées. Ainsi, les nombres racines de polynômes à coefficients entiers sont appelés *nombres algébriques* : c'est le cas de 1 (solution de $x-1=0$), de $1/3$ (solution de $3x-1=0$), de $\sqrt{2}$ (solution de $x^2-2=0$), etc. On connaît des nombres qui ne sont pas algébriques, on les appelle les *nombres transcendants*. C'est le cas par exemple de π et de e. Au premier abord, il semble qu'il y ait beaucoup plus de nombres algébriques que de nombres transcendants (vous n'en connaissez que deux !). Un jour de pur délire, on pourrait même envisager qu'il y ait autant de nombres de chaque catégorie. Or, si on prend un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, vous calculerez peut-être un jour que la probabilité d'obtenir un nombre transcendant vaut ....1 ! ! ! ! En effet, la « mesure » de l'ensemble des nombres algébriques est nulle. Pourtant, demandez à un ordinateur de vous donner un milliard de nombres au hasard entre 0 et 1, l'écran ne vous affichera que des nombres algébriques (décimaux même !). Mathémator a déjà parlé de ce problème. L'ensemble $\mathbb{R}$ recèle bien d'autres résultats étonnants. Il existe une famille de nombres correspondant elle aussi à une probabilité de 1, pourtant, les mathématiciens ne connaissent qu'un seul de ces nombres dont ils ne peuvent calculer que quelques décimales (d'ailleurs ils ne pourront jamais en trouver plus car il est par essence non calculable !). L'étude de l'intervalle $[0,1]$ renvoie donc à des résultats parfois plus philosophiques que techniques...

II - Correspondances discret/continu

a. Du continu au discret et retour

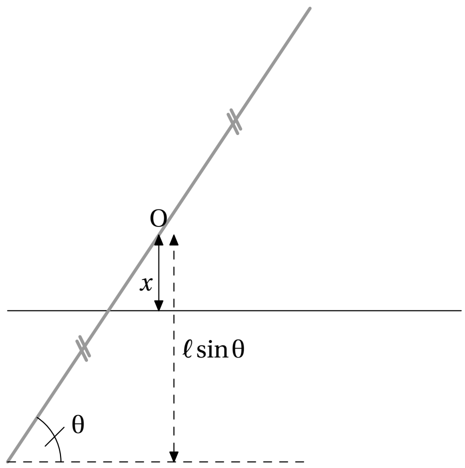
On joue au palet avec un palet de rayon r et une cible carrée de côté a. On gagne si le palet est tout entier compris dans le carré. On suppose que le joueur est adroit et que le centre du palet atteint toujours la cible.
Un premier problème est de traduire le problème « ponctuellement », c'est à dire passer d'une propriété concernant un solide tout entier (le palet à l'intérieur de la cible) à une propriété concernant un point censé les représenter tous : on pense au centre. Le problème revient en effet à calculer la probabilité que le centre O du palet soit à l'intérieur du carré de même centre que la cible et de côté $a-2r$. On appellera $\mathrm{A'B'C'D'}$ ce carré et ABCD la cible. Faîtes un dessin.
On supposera que tous les points intérieurs de $\mathrm{A'B'C'D'}$ ont la même « chance » d'être atteints par O (ce qu'on traduirait dans un modèle discret par : équiprobabilité).
Selon un modèle *continu*, l'ensemble des issues du problème est l'ensemble des points intérieurs de $\mathrm{A'B'C'D'}$. Mais comment faire pour calculer : on ne peut pas attribuer une même probabilité à chaque point car il y en a une infinité.
On va alors adopter momentanément un modèle discret pour mieux revenir au continu « en passant à la limite ».
Tapissons la cible à l'aide de petits carrés de côté $a/100$ par exemple. L'ensemble des issues possibles n'est plus l'ensemble des points du carré, mais l'ensemble des petits carreaux (pensez à votre beau visage et à l'ensemble des pixels qui le représente sur une photo numérique) : il y en a $100\times 100 = 10^4$. Il y a équiprobabilité (on sait ce que ça représente dans un modèle discret) donc la probabilité p de gagner est

$$p = \frac{\text{nombre de carreaux de A'B'C'D'}}{10^4} = \frac{\text{Aire de A'B'C'D'}}{\text{Aire de ABCD}}$$

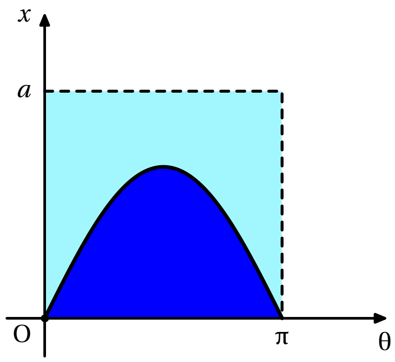
Le passage au continu va alors de soit : en faisant tendre le nombre de petits carreaux vers $+\infty$, le résultat reste inchangé car la cible est un carré... $p = \dfrac{(a-2r)^2}{a^2}$.

b. Vers une « équiprobabilité continue »

Problème : *Sur un parquet lisse formé de planches de largeur $2a$ séparées par des rainures droites, parallèles et équidistantes, on jette une aiguille de longueur 2ℓ avec $\ell < a$. Quelle est la probabilité que l'aiguille coupe l'une des rainures ?*



Comment modéliser l'expérience ? On pourrait repérer la position de l'une des extrémités de l'aiguille, mais il faudrait distinguer les cas, selon que l'extrêmité choisie touche ou dépasse une rainure, celle du « haut » ou celle du « bas ».
On va plutôt s'occuper du milieu O de l'aiguille et mesurer la distance x de O à la rainure la plus proche : x prend donc une valeur aléatoire dans $[0, a]$.
Soit θ l'angle formé par la rainure la plus proche et l'aiguille. L'angle θ prend une valeur aléatoire dans $[0, \pi]$
Notons A l'événement : « l'aiguille coupe l'une des rainures ».
Une issue correspond au tirage aléatoire et simultané d'une valeur de θ et d'une valeur de x dans le rectangle $[0, a] \times [0, \pi]$.
L'événement A correspond alors aux valeurs du couple (x, θ) vérifiant $0 \leqslant x(\theta) \leqslant \ell \sin\theta$.
Dans un repère cartésien, on place l'angle θ en abscisse et la distance $x(\theta)$ en ordonnée. On trace la courbe d'équation $x = \ell \sin\theta$. On cherche donc à « comptabiliser » l'ensemble des valeurs de x inférieures à $\ell \sin\theta$. Il y en a « autant »que de points situés sous la courbe (aire grisée). Or l'ensemble total des valeurs possibles de $x(\theta)$ sont représentées par le rectangle hachuré.



On peut supposer que la répartition des points sur le parquet est uniforme : O peut se trouver de manière aléatoire à n'importe endroit. Comme on l'a vu avec le jeu du palet, on obtient

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{aire bleue}}{\text{aire bleu ciel}}$$

Or l'aire bleue vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \ell \sin\theta \, d\theta$ et l'aire du rectangle vaut πa, donc

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^{\pi} \frac{\ell \sin\theta}{\pi a} \, d\theta = \frac{2\ell}{\pi a}$$

Il ne vous aura pas échappé que la probabilité dépend de π ce qui n'avait rien d'évident a priori. Elle peut même permettre de calculer pas mal de décimales de π à l'aide d'une simulation (voir encadré).

Vous aurez surtout remarqué que l'équiprobabilité discrète $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ se traduit ici par un rapport d'aire et fait donc intervenir une sommation infinie, c'est à dire une intégrale...

Des probabilités pour calculer π

C'est Buffon, au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, qui proposa l'expérience précédente et la formule associée. Certains ont pensé l'utiliser pour mesurer π. Par exemple, en 1850, l'ami Wolf lança 5000 aiguilles pour obtenir $\pi \approx 3,1596$. Malheureusement, l'expérience sous-entend que l'espace physique est euclidien, c'est à dire parfaitement plan, sans attraction gravitationnelle, sans déformation de l'espace relativiste etc. L'efficacité est en fait très mauvaise : il faudrait lancer 900000 aiguilles pour obtenir 4 décimales de π avec une probabilité de 95%. Il faut donc faire attention aux expériences physiques ou bien ruser en prenant par exemple $\ell = 39,26990817cm$, $a = 50cm$ et lancer deux aiguilles : si une seule sur les deux croise une rainure, vérifiez qu'on obtient $\pi \approx 3,141592654$ avec seulement deux lancers !

Mieux vaut s'appuyer sur des objets mathématiques : par exemple, vous montrerez peut-être un jour que la probabilité que deux nombres entiers choisis au hasard entre 0 et n soient premiers entre eux (c'est à dire sans facteur premier commun pour les non-spécialistes) tend vers $6/\pi^2$ quand n tend vers $+\infty$. Il ne reste plus qu'à trouver dans la nature des paires de nombres entiers, mais la méthode est très lente et on ne peut guère obtenir plus de quatre décimales en utilisant un million de paires d'entiers.

Sinon, à notre niveau, on peut utiliser XCAS simulant le choix d'un nombre entre 0 et π et d'un autre entre 0 et a.

```
buffon(N,a,L):={
local rx,rt,M,n,k;
rt:=rand(0..Pi); // fonction aléatoire à valeurs dans [0,Pi] (theta)
rx:=rand(0..a);  // fonction aléatoire à valeurs dans [0,a]  (x(theta))
M:=ranm(1,N,'L*sin(rt())-rx()'); // liste de N valeurs de L*sin(t)-x
n:=count_sup(0,M);  // on compte les valeurs positives, i.e. telles que x<L*sin(theta)
return(evalf(2*L*N/(n*a))) // on renvoie l'approximation de pi d'après le résultat théorique
}:;
```

Puis on lance 1 000 000 d'aiguilles :

```
sran; // pour réinitialiser la « graine » aléatoire
buffon(1000000,2,1)
```

Et on trouve en 25 secondes : 3,156565657 puis 3.147326346 puis 3.215527137....

Faîtes d'autres simulations sur un échantillon de 1 000 000 de couples (θ, x). Pourquoi une telle méthode pose intrinsèquement un problème ?

III - Notion de densité de probabilité

a. Modélisation du choix d'un nombre dans $[0,1]$ - Loi uniforme

Nous venons de voir que, dans des situations planes, un modèle continu de loi de probabilité pouvait se résumer à un rapport d'aire.

Intéressons-nous maintenant à une situation linéaire. Calculons en effet la probabilité qu'un nombre quelconque du segment $[0,1]$ se trouve dans un certain intervalle $[a,b]$ inclus dans $[0,1]$.

Par analogie aux situations homogènes (ou **uniformes**) vues précédemment, et en se souvenant des élucubrations de nos deux hurluberlus du préambule, on peut subdiviser le segment $[0,1]$ en 100 petits segments de même longueur Δx (1mm par exemple). La probabilité qu'un nombre se trouve dans l'une des subdivisions vaut donc 1/100 compte-tenu de l'uniformité de la répartition. Notons $n_{a,b}$ le nombre de subdivisions « recouvertes » par $[a,b]$ et $\lambda([a,b])$ la longueur du segment $[a,b]$. Notons enfin $\mathbb{P}([a,b])$ la probabilité que le nombre se trouve dans le segment $[a,b]$.

Alors $\mathbb{P}([a,b]) = \dfrac{n_(a,b)}{100}$. On s'aperçoit que $\mathbb{P}([a,b])$ est indépendante de « l'unité » Δx choisie par proportionnalité, donc

$$\mathbb{P}([a,b]) = \frac{\lambda([a,b])}{\lambda([0,1])}$$

On peut ainsi faire tendre Δx vers 0 pour obtenir un modèle continu où on se rappelle que $\lambda([a,b]) = \int_a^b dx$Finalement

$$\mathbb{P}([a,b]) = \frac{b-a}{1-0} = b-a$$

On peut alors écrire $\mathbb{P}([a,b]) = b - a = \displaystyle\int_a^b 1 \cdot dx$. On admettra qu'il s'agit d'une loi de probabilité.

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

Cette question est hors programme mais nécessite une réponse pour votre « confort » intellectuel. Une définition rigoureuse n'est pas envisageable, mais nous allons donner l'idée générale.
Notons Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience (l'univers).
On appelle probabilité sur Ω toute « transformation » $\mathbb{P}$ allant de l'ensemble des « parties » de Ω dans $[0,1]$ et vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour toute « partie » A et B de Ω *disjointes*.
Vous vérifierez qu'à partir de cette définition, on obtient les propriétés usuelles

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Cette loi de probabilité sur $[0,1]$, qu'on appelllera **loi uniforme** sur $[0,1]$, est associée à une fonction constante (dans le cas présent la fonction constante et égale à 1) qui caractérise la probabilité : on l'appelle la **densité** de $\mathbb{P}$

b. Modélisation de la désintégration radioactive - Loi exponentielle

Nous avons déjà disserté sur la nécessité de traiter le problème de la désintégration radioactive d'un point de vue probabiliste en utilisant une loi binomialeVoici une autre approche qui aura l'avantage de prendre en compte « la continuité du temps ». Rappelons encore une fois le modèle utilisé.

En TP de physique, vous avez étudié la désintégration du césium 137 à l'aide d'un compteur de désintégration β et γ et d'un logiciel adapté. Vous avez alors vérifié expérimentalement les résultats suivants.

Hypothèse de travail Soit une matière fissile contenant N atomes radioactifs . Dans le cas de la radioactivité « naturelle », on peut considérer que les désintégrations des atomes sont indépendantes et que pour un intervalle de temps donné, chaque atome a la même probabilité d'être désintégré. De plus, le phénomène est homogène : il n'y a pas de moments privilégiés où les désintégrations auraient plus de « chances » de se produire. Enfin, la probabilité qu'un noyau se désintègre dans un intervalle de temps $]t, t + \Delta t[$ ne dépend pas de t. On parle alors de *loi de durée de vie sans vieillissement* : un atome ne connaît ni d'adolescence (ouf !) ni de troisième âge. Il est en perpétuel âge mûr puis meurt brusquement.

Hypothèse de modèle Soit Δt un intervalle de temps « très petit » fixé. D'après ce qui précède, on peut MODÉLISER la désintégration radioactive en disant que la probabilité qu'un atome se désintègre dans l'intervalle de temps Δt vaut

$$\mathbb{P}(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$$

avec λ une constante positive ne dépendant que de la nature du noyau. Ainsi, pour une matière donnée, la probabilité pour le noyau de se désintégrer durant un intervalle de temps Δt ne dépend que de Δt et pas du moment où a été fait la mesure.

Calcul « discret » Soit t un temps donné. On peut l'exprimer comme multiple du Δt choisi initialement (par exemple la seconde). On pose alors

$$t = n \Delta t$$

Soit T le temps d'attente avant d'être désintégré. Calculons la probabilité pour un atome de ne pas être désintégré au temps t. On la notera $\mathbb{P}(T > t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(T > n\Delta t) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}(T > \Delta t) \times \mathbb{P}(T > \Delta t) \times \cdots \times \mathbb{P}(T > \Delta t)}_{n \text{ fois}} \qquad \text{car la loi est sans mémoire} \\
&= [\mathbb{P}(T > \Delta t)]^n \\
&= [1 - \mathbb{P}(\Delta t)]^n \\
&= (1 - \lambda \Delta t)^n \\
&= \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Comment « passer au continu » ? Comme nous l'avons vu lors de la découverte de l'intégration, nous allons faire tendre Δt vers 0. Or $t = n\Delta t$ et t est une valeur finie, donc si Δt tend vers 0, alors forcément n doit tendre vers $+\infty$. Donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} > t) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$$

Preuve de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

Montrez que $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ en reconnaissant un taux de variation. Alors

$$\begin{aligned}(1+x/n)^n &= e^{n\ln(1+x/n)}\\ &= e^{n\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\times x/n}\\ &= e^{x\times\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x/n)}{x/n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$

Grâce à ce petit aparté, vous pouvez comprendre que

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} > t) = e^{-\lambda t}$$

Il existe un autre moyen de se laisser convaincre en utilisant des résultats de probabilité conditionnelle (on pourra modéliser de la même manière les arrivées successives de clients à un guichet : vous verrez ça au bac...cf exercice 1 page 10).

Mais ce n'est pas fini...

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{T} > t) &= e^{-\lambda t}\\ &= 1 - \left(-e^{-\lambda t} - (-e^0)\right) \quad \text{si si, c'est plus simple comme ça...}\\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda\tau}\right]_0^t\\ &= 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau\end{aligned}$$

Évidemment, c'est bien beau, mais on en vient à regretter les délires de Mathémator. Mais, on se souvient de l'introduction de la fonction de densité de la loi uniforme sur $[0,1]$, donc on essaie de s'en rapprocher dans le but de trouver un modèle général de l'étude des phénomènes continus.

Est-ce que ce $\mathbb{P}$ a des chances d'être une loi de probabilité ?

On peut remarquer que $\mathbb{P}(\mathrm{T} > 0)$, c'est à dire en fait la probabilité qu'un atome se désintègre à un moment ou à un autre (personne n'est éternel...) vaut

$$\mathbb{P}(\mathrm{T} > 0) = 1 - \int_0^0 \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau = 1$$

On peut vérifier sans problème que $0 \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{T} > t) \leqslant 1$ pour tout réel t. Donc, on tient le bon bout.

Toutefois, cette écriture sous la forme « 1− intégrale » est assez déroutante (vous ne manquerez pourtant pas de faire le parallèle avec $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$).

Considérons deux instants a et b tels que $a < b$ et essayons de calculer la probabilité que l'atome se désintègre entre les temps a et b, c'est à dire $\mathbb{P}(\mathrm{T} \in]a,b])$. Vous remarquerez que $\mathbb{P}(\mathrm{T} \in]a,b]) = \mathbb{P}(\mathrm{T} > a) - \mathbb{P}(\mathrm{T} > b)$: l'atome doit se désintégrer après a mais pas après b. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{T} \in]a,b]) &= \mathbb{P}(\mathrm{T} > a) - \mathbb{P}(\mathrm{T} > b)\\ &= 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau - \left(\int_0^b \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau\right)\\ &= \int_0^b \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau - \int_0^a \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau\\ &= \int_a^b \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau\end{aligned}$$

ce qui est cohérent avec ce que nous avons établi pour la loi uniforme sur $[0,1]$ en prenant comme fonction de densité de ce qu'on appellera **la loi exponentielle** la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(\tau)=\lambda e^{-\lambda\tau}$.

Une intégrale avec borne infinie

Nous aurions pu procéder autrement : si la désintégration n'a pas lieu avant t, c'est qu'elle a lieu après, donc en un certain temps appartenant à l'intervalle $[t,+\infty[$. Donc, on a envie d'écrire que

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}>t)=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

...sauf que cette écriture n'a pas de sens en Terminale (les concepteurs de programme demandent d'en parler quand même...) ...mais

$$\begin{aligned}\int_t^u \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau &= \left[-e^{-\lambda\tau}\right]_t^u\\ &= -e^{-\lambda u}+e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

...et $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-\lambda u}=0$, donc $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_t^u \lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau=e^{-\lambda t}=\mathbb{P}(\mathrm{T}>t)$ OUF ! L'honneur est sauf (ce qui n'est pas le cas de notre santé mentale).

On peut en effet écrire

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}>t)=\mathbb{P}(\mathrm{T}\in]t,+\infty[)=\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

ce qui est encore cohérent avec la définition qui suit.

IV - Les définitions

Loi de probabilité

Une loi de probabilité p sur un intervalle $\mathrm{I}=[a,b]$ est déterminée par une fonction f continue, positive sur I appelée densité de p qui vérifie

$$\int_a^b f(t)\,dt=1$$

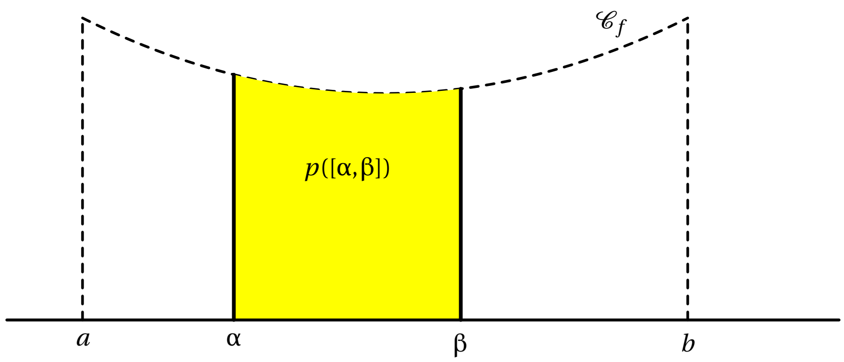
Pour tout intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans I, la probabilité de l'intervalle$[\alpha,\beta]$ est

$$\mathbb{P}\big([\alpha,\beta]\big)=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

Mathémator : Est-ce que ça vous convient ?

Téhessin : Il faut vérifier que p est à valeurs dans $[0,1]$. Déjà, comme f est positive, l'intégration conservant l'ordre, on a bien p positive. Pour le reste, il faudrait montrer que p est maximum pour $[a,b]$.

Mathémator : un petit dessin vous aidera peut-être



Téhessin : Mais oui ! J'y suis ! En fait $\mathbb{P}([\alpha,\beta])$ est une aire. Et on voit bien que l'aire maximum correspond à $[a,b]$.

Mathémator : Tssss..., Téhessix, combien de fois faudra-t-il vous le répéter : de la rigueur, que diable ! Croyez-vous que je vais prendre au sérieux votre « on voit bien que » ? La fonction f est positive, donc...

Téhessin : ...la fonction $\mathrm{F}\ :\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b]$ car $\mathrm{F}'(x) = f(x) \geqslant 0$, donc c'est bon.

Mathémator : Vous allez m'en vouloir, mais, c'est pour votre bien : p et F, ce n'est pas la même chose. La fonction F est définie pour tout réel appartenant à $[a,b]$, alors que p est définie pour tout intervalle inclus dans $[a,b]$. Mais, pour tous nombres α et β inclus dans $[a,b]$, on a

$$\mathbb{P}([\alpha,\beta]) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt - \int_\beta^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt = \mathbb{P}([a,b])$$

donc nous pouvons conclure.
Vous aurez sûrement remarqué qu'ainsi $\mathbb{P}(\{\alpha\}) = \mathbb{P}([\alpha,\alpha]) = 0$ ce qui corrobore notre intuition du début de chapitre. Vous aurez aussi deviné que les problèmes de lois continues en Terminale se résumeront le plus souvent à des problèmes d'intégration.

Loi uniforme

On appelle loi uniforme sur $[a,b]$ la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante f définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif.
On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Variable aléatoire et loi continue

Soit une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathrm{I} = [a,b]$ et de densité f.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I.
On dit que X suit la loi de probabilité $\mathbb{P}$ si, pour tout $x \in [a,b]$

$$\mathbb{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Fonction de répartition

Soit une loi de probabilité p sur $\mathrm{I} = [a,b]$ et de densité f.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I suivant la loi de probabilité $\mathbb{P}$.
On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur I par

$$\mathrm{F}(x) = \mathbb{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

V - Exercices

Exercice 1 Approche différentielle de la loi exponentielle

La durée de vie d'un clone de lombric syldave est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0,+\infty[$ où l'événement $\{T \geqslant t\}$, avec $t \geqslant 0$, signifie que le clone de lombric syldave est vivant à l'instant t. On suppose que T suit la ***loi de durée de vie sans vieillissement*** P, c'est à dire que la probabilité que le clone de lombric syldave soit vivant à l'instant $t+h$ (avec t et h des réels positifs) sachant qu'il est vivant à l'instant t, ne dépend que de t. Ainsi

$$\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = \mathbb{P}(T \geqslant h)$$

On note φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t) = \mathbb{P}(T \geqslant t)$. On suppose que φ est dérivable sur $[0,+\infty[$.

1. Montrez que $\varphi(t+h) = \varphi(t) \times \varphi(h)$ (ça ne vous rappelle rien ?).

2. Calculez $\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$.

3. On pose $\varphi'(0) = k$. Montrez que $\varphi'(t) = k\varphi(t)$ et déduisez-en une expression simple de $\varphi(t)$. Justifiez que $k < 0$.

Exercice 2 Exercice classique sur la loi exponentielle

La durée de vie, exprimée en jours, des avions de fabrication syldave est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,002.

1. Donnez la fonction de répartition F de T.

2. Calculez la probabilité pour qu'un avion syldave ait une défaillance avant 500 jours - après 800 jours.

3. Quel est le taux moyen de défaillance entre 500 et 800 jours[c]

4. Déterminez l'instant t où $F(t) = 0,5$.

Exercice 3 Loi uniforme sur $[0,\pi]$

Un point M est pris au hasard sur un demi-cercle de diamètre [AB], de centre O et de rayon 1. Nous modéliserons cette situation en supposant que l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ suit la loi uniforme sur $[0,\pi]$.
Quelle est la probabilité p que le triangle AOM ait une aire inférieure à $1/4$?

Exercice 4 Même problème - Modèle différent

À tout réel x pris au hasard dans $[0,2]$ en suivant la loi uniforme sur $[0,2]$, on associe le point M du demi-cercle de diamètre [AB], de centre O et de rayon 1, tel que $AM = x$.

1. Montrez que

$$\left(1-(x/2)^2\right)\left(x/2\right)^2 \leqslant 1/16 \iff x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1), 2\right]$$

2. Déduisez-en que la probabilité que le triangle AOM ait une aire inférieure à $1/4$ est $1-\sqrt{2}/2$.

Exercice 5 Espérance de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire continue de densité f définie sur $[a,b]$. On appelle espérance de X (sous certaines conditions) et on note $\mathbb{E}(X)$

[c] Le taux moyen de défaillance entre les instants t_1 et t_2 est le quotient de la probabilité pour qu'un avion ait sa première panne entre les instants t_1 et t_2 divisée par la durée $t_2 - t_1$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b t f(t)\, dt$$

Calculez l'espérance d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$

Exercice 6 Espérance de la loi exponentielle

On admettra que dans le cas d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ et de densité f sur $[0, +\infty[$, l'espérance de X vaut

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t f(t)\, dt$$

Montrez que $\mathbb{E}(X)$ existe et calculez-la en fonction de λ.

Exercice 7 De la loi uniforme à la loi exponentielle

Soit Y une variable aléatoire continue de loi uniforme sur $[0, 1]$.
Montrez que la variable aléatoire continue X définie, pour un réel λ strictement positif par

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Ce résultat permet en particulier de simuler une loi exponentielle à l'aide d'un générateur de nombres « pseudo-aléatoires » : comment ?

Exercice 8 Loi normale

Une variable aléatoire X suit *la loi normale centrée réduite* si X a pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Étudiez et représentez f. À votre avis, que vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$?

Exercice 9 Bac

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$\mathbb{P}([0 ; t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $\mathbb{P}([0 ; 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{A}} - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{A}} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

Exercice 10 Bac

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $\mathbb{P}(\mathrm{X} > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0{,}125$.
   On prendra $0{,}125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
   Rappel :
   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;\,+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :
   pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathbb{P}([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et
   pour $c \geqslant 0$, $\mathbb{P}([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 Bac

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\mathrm{A} : \frac{\binom{120}{3} + \binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \mathrm{B} : \frac{3}{120}$$

$$\mathrm{C} : \binom{10}{3} \times \left(\frac{120}{6000}\right)^3 \times \left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad \mathrm{D} : \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{120}\right)^3 \times \left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\mathrm{A} : 0{,}98 \qquad \mathrm{B} : \frac{0{,}4 \times 0{,}95}{0{,}6 \times 0{,}98 + 0{,}6 \times 0{,}02} \qquad \mathrm{C} : 0{,}6 \times 0{,}98 \qquad \mathrm{D} : \frac{0{,}6 \times 0{,}98}{0{,}6 \times 0{,}98 + 0{,}4 \times 0{,}95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$\mathbb{P}\left([0\ ;\ t[\right) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$A:\ e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad B:\ e^{\frac{5}{4}} \qquad C:\ 1-e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad D:\ e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :
$E = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) L'intégrale $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ est égale à :

$$A : \lambda\frac{t^2}{2}e^{-\lambda t} \qquad B : -te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \qquad C : \lambda t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} - \lambda \qquad D : te^{-\lambda t} - \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

Exercice 12 Bac

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

- Démontrer l'égalité suivante : $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$.
- En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie
  $\mathbb{P}_{(X>t)}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement),
  $\mathbb{P}_{(X>t)}(X > s+t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(X > s+t)$ sachant que $(X > t)$ est réalisé.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $\mathbb{P}(T \leqslant 10) = 0{,}7$.
On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ.

b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
$\mathbb{P}_{(T>10)}(T > 15)$.

c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.

On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.

b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.
Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Exercice 13 Bac

Les parties A et B sont indépendantes
Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.
Partie A
On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B
On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   a) si ce composant est défectueux ;
   b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$\mathbb{P}(T \geqslant t) = 0,02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$:
Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathbb{P}([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
Pour $c \geqslant 0$, $\mathbb{P}([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14 Bac

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- D l'évènemenrt « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composanrt provient du premier fournisseur » ;
- F_2 l'évènement « le composanrt provient du second fournisseur ».

1. a) Dessiner un arbre pondéré.
   b) Calculer $\mathbb{P}(D \cap T_1)$, puis démontrer que $\mathbb{P}(D) = 0,022\ 5$.
   c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?
   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a) Sachant que $\mathbb{P}(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?