Première Leçon

LES NOMBRES

After more than a decade of intense research, Derek unveils his calculation for the value of pi.

I - De quoi allons-nous parler ?

Tout au long de l'année, nous allons travailler avec des nombres, mais savons-nous exactement ce qu'ils représentent, comment et pourquoi ils sont apparus, comment les classer. Nous commencerons par les **entiers naturels** en insistant sur certains d'entre eux : **les nombres premiers**.
Nous passerons ensuite aux **entiers relatifs**, puis aux nombres **décimaux** et **rationnels**.
Ce sera l'occasion de travailler sur la **division euclidienne** et le **développement décimal illimité**.
Nous terminerons par les nombres **irrationnels** et montrerons que $\sqrt{2}$ en fait partie.
Nous aurons ainsi exploré l'ensemble des **nombres réels**.
Il nous restera à classer ces nombres en *créant* une **relation d'ordre**. Nous pourrons alors les ranger dans des **intervalles**.

II - Mesurons la Terre

Ératosthène remarqua que près de la ville actuelle d'Assouan, le soleil à midi « rentarit sans ombre » dans un puits un certain jour de l'année alors que le même jour à la même heure, l'ombre d'un piquet faisait un angle de 7,5° avec le piquet lui-même à Alexandrie, ville située à 800 km du puits sur le même méridien.
Il en déduit le rayon de la Terre : comment a-t-il fait ?

III - À la découverte des nombres premiers

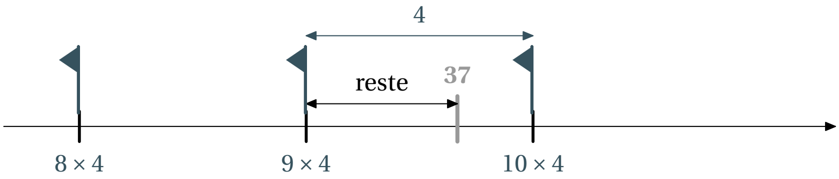
Dans un carré de côté 10, écrivez les nombres de 1 à 100, puis barrez 1, les multiples de 2, 3, 4, etc. : que reste-t-il ?
Il s'agit du crible d'Ératosthène...

IV - Savez-vous diviser ?

Divisons en dessinant

Vous vous souvenez à peu près du mécanisme de la division que vous avez appris à l'école primaire : vous savez comment ça marche, mais savez-vous pourquoi ça marche ?

Pour vous raffraichir la mémoire, posez la division de 37 par 4.
Pour y voir plus clair, nous « dessiner » cette division. L'idée de base vient du dessin suivant[a] :



Commentez ce schéma.
Puisque nous voulons voir ce qui se passe « après la virgule », nous allons dessiner un segment de droite de 20 cm de long, la première graduation correspondra à 36, la dernière 40, l'unité valant 5 cm.
Placez-y 37.
Divisez alors le segment [36 ; 37] en 10. Que peut-on en déduire ?
Divisez à nouveau en 10 le petit segment contenant 37. Si votre dessin est précis, que remarque-vous ? Qu'en concluez-vous ?

Traduction du dessin en calcul

Si vous tapez $\boxed{3}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{4}$ sur votre calculatrice, vous obtenez 9.25 sur votre écran[b].
En pensant aux subdivisions que vous avez tracé sur votre schéma, essayez de traduire le résultat lu à l'aide d'une égalité faisant intervenir 4, $\dfrac{4}{10}$ et $\dfrac{4}{100}$.

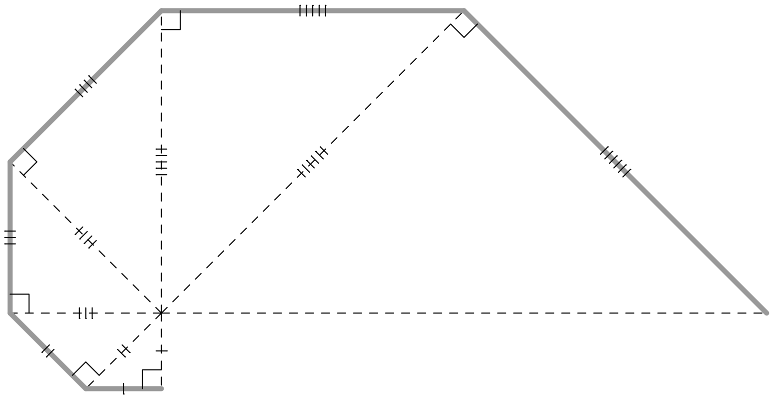
« J'abaisse un zéro, je mets une virgule »

Sans « abaisser de zéro », essayez de reposer votre division en utilisant les phrases « en truc combien de fois quatre », « en truc combien de fois quatre dixièmes », « en truc combien de fois quatre centièmes ».

V - Dessinons des racines

Il aurait été plus correct d'intituler cette activité : **construisons des irrationnels à la règle et à l'équerre**.
Quelle est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? Déduisez-en une *construction* de $\sqrt{2}$.
Construisez de même $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{11}$.

Casse-tête en forme d'escargot adepte du cubisme : quelle est la longueur du dixième segment gris de cette spirale[c] ?



[a] C'est même le principe de la démonstration de l'existence de la division euclidienne que vous verrez peut-être en Tale S spécialité maths...
[b] C'est ce que vous aviez déjà obtenu en posant l'opération...
[c] Je ne vous demande pas de prouver le résultat mais juste de le deviner

VI - $\sqrt{2}$ est irrationnel

Qui se cache derrière l'écriture $\sqrt{2}$?

$\sqrt{2}$: qu'est-ce que ça veut dire ? Vous rappelez-vous de la définition vue en collège[d] ?
Pour les grecs, un nombre « existait » si l'on pouvait le dessiner. Ayant à votre disposition une règle de longueur 1 et une équerre, pouvez-vous dessiner $\sqrt{2}$?

Rationnel or not rationnel ?

Comme son nom l'indique, un irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel…
Il serait donc utile de se souvenir de ce qu'est un rationnel : rappelez la définition.
Ainsi, on ne sait pas vraiment ce qu'est un irrationnel, mais on sait ce qu'il n'est pas[e].
Une des premières questions qui surgit de votre esprit en ébullition est sûrement : est-ce que de tels nombres existent ?
Tapons SHIFT (√) 2 sur notre machine. Nous obtenons 1,414213562373. On pourrait penser qu'en découpant le segment $[1;2]$ en fractions suffisamment petites, on puisse « tomber » sur ce nombre, et donc l'exprimer en fractions d'unité. Que pourrait-on en déduire ?
Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Puisque je connais ma définition, je sais alors qu'il existe deux entiers - appelons-les p et q - tels que $\sqrt{2} = {}^{p}/_{q}$. Supposons que p et q sont choisis pour que la fraction soit la plus « simple » possible : comment comprenez-vous cette formulation ?

Où nous allons mettre au point un théorème sur la parité

Avant d'aller plus loin, faisons un petit aparté : comment traduire qu'un entier est pair ? Et tant qu'on y est qu'un entier est impair ? Essayer de donner une définition la plus générale possible mais qui permette de caluler[f].
À votre avis, p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?
Observez maintenant les liens entre la parité d'un nombre et celle de son carré sur quelques exemples.
Cela vous donne des idées ? Essayez alors d'énoncer un théorème… puis de le prouver !

Revenons à nos moutons

Bon. On suppose donc que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme ${}^{p}/_{q}$, avec p et q les plus simples possibles. Pouvez-vous en déduire des choses sur la parité de p^2 puis sur celle de p ?
Comment peut alors s'écrire p ? p^2 ? q^2 ? Qu'en déduisez-vous sur la parité de q ?
Méditez sur ce résultat.

Considérations sur le raisonnement que nous venons d'utiliser

Otto SCHZPRWT, chef des services secrets syldaves, interroge un homme que des agents des forces spéciales ont surpris en train de rôder autour d'une usine ultra-secrète d'aspirateurs. Pour prouver son innocence, il lui demande de réciter l'hymne à la gloire du Président syldave, mais le prévenu en est incapable. Otto SCHZPRWT en déduit donc qu'il n'est pas un patriote syldave, mais un vil espion à la solde de la Bordurie et le condamne à avaler en moins de 10 minutes une quenelle de grande taille de 18 kg.
Arrivé à ce moment du récit, vous vous demandez si votre pauvre prof de maths à abusé de la Slivoviz, célèbre eau de vie syldave.
Et bien non ! Car le bon Otto vient d'utiliser le même raisonnement qui nous a conduit à conclure que $\sqrt{2}$ n'était pas rationnel.

[d] Vous pouvez rechercher comment nos voisins européens appellent ce nombre et comment on a pu l'appeler depuis l'Antiquité
[e] C'est clair !
[f] if you see what I mean…

Reprenons les faits : notre hypothèse de départ était que $\sqrt{2}$ était rationnel. Après une série de déductions logiques, nous sommes arrivés à une conclusion *absurde*, à savoir que p et q devaient être tous deux pairs. Par un raisonnement juste, nous sommes arrivés à un résultat faux : c'est donc que notre hypothèse de départ était fausse.
Nous avons effectué un **raisonnement par l'absurde**, qui, malgré son nom, est un type de raisonnement extrêmement rigoureux et que nous utiliserons souvent.
Son utilisation dépasse le cadre mathématique : il est utilisé par les chefs de services secrets mais aussi couramment par les garagistes, les plombiers, les médecins, les détectives privés, etc.[g]
Nous venons de nous initier à la Logique, qui est une discipline qui occupe les esprits depuis des siècles mais qui a connu un véritable essor surtout à partir du début du XX$^{\text{Ã¨me}}$ sous l'imulsion du britannique B. RUSSEL.

VII - Développement décimal illimité

Curiosité

Observez ce qu'affiche une calculatrice quand vous effectuez les calculs suivants :

$$\frac{324-32}{9} \qquad \frac{3245-32}{99} \qquad \frac{324510-32}{9999}$$

Sans preuve, essayez d'écrire 57,33333333333333333333... sous forme de fraction.

Une histoire de ...

Par convention, les ... veulent dire qu'il y a une infinité de 3 à droite de la virgule. C'est un peu vague, nous en reparlerons plus bas.
À votre avis, que vaut 1,333... −1,333 ? 1,333− 1,333 ? $1,333\cdots-1,33$?
Tout ça reste un peu empirique.

L'algèbre au secours de la numération

Nous aimerions prouver ce que nous avons observé tout à l'heure. Essayons donc d'écrire 32,444... sous forme de fraction, puisque la machine nous dit que *ça a l'air* possible.
Comme c'est embêtant d'écrire 32,444..., nous allons lui donner un petit surnom, par exemple *Joe*.
Donc $Joe = 32,444\dots$.
LA ruse : que vaut $10 \times Joe - Joe$? Déduisez-en que *Joe* est un nombre rationnel puis retrouvez les résultats précédents.

On n'est pas des Mickey

Contrairement à cette charmante souris, nous avons dix doigts et pas huit. Nous comptons donc en **base dix** : qu'est-ce que ça veut dire ?
Pour vous aider à avoir des idées, pensez à ce qui se passe après 9, 99, 999, etc. et surtout, pensez **puissances de 10**.

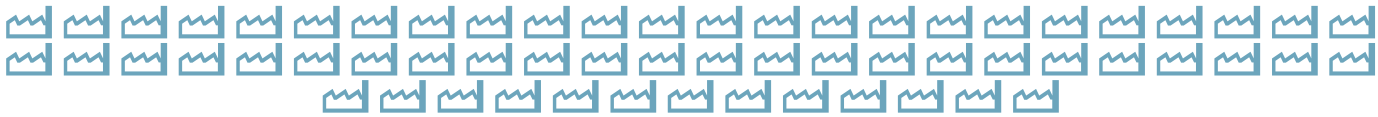
Trinité

Après des vacances près de Carnac, Plexigladz, le Grand Chef de Gare du peuple syldave[h] a eu une illumination : tout doit marcher par trois. Il a donc ordonné d'effacer de Syldavie tous les chiffres sauf 0, 1 et 2.

[g]Cherchez des situations correspondant à ces corps de métier...
[h]C'est à dire le président de Syldavie

Les Syldaves vont donc devoir apprendre à compter en base 3.

En vous inspirant de ce que nous avons dit au sujet de la base dix, essayez de nommer cet objet :
Plexigladz aime compter ses usines la nuit pour s'endormir : combien en a-t-il[i] ?



Développement décimal périodique

Posez la division de 1 par 3, vous obtenez sans cesse le reste 1 et le déloppement décimal est donc 0,33333333333...
En fait, il existe une écriture qui évite les ... : $0,\underline{3}$ signifie de la même manière que le 3 se répète infiniment.
Voyez ce que donne 13/7.

1 3	7
6 0	1.8 5 7 1 4 2 8 5 7
4 0	
5 0	
1 0	
3 0	
2 0	
6 0	
4 0	
5 0	
1	

Donc on écrit $13 \div 7 = 1.\underline{857142}\dots$

Si, et seulement si

Si je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé, mais est-ce que **si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave ?
La première proposition[j] est une **implication** vraie : nager en maillot de bain dans un lac syldave implique d'être mouillé.
On utilise le symbole $\Longrightarrow$ pour matérialiser cette implication :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \Rightarrow \text{être mouillé}$$

La deuxième proposition[k] est l'**implication réciproque**. Dans le cas qui nous occupe, cette implication réciproque est fausse

$$\text{être mouillé} \not\Rightarrow \text{nager en maillot dans un lac syldave}$$

On dit que ces deux propositions ne sont pas **équivalentes** :

$$\text{Nager en maillot dans un lac syldave} \not\Leftrightarrow \text{être mouillé}$$

Revenons à nos nombres.
En pensant à la division posée, expliquer pourquoi un nombre rationnel admet forcément un développement décimal périodique.

[i] en base trois, bien sûr
[j] **Si** je nage en maillot de bain dans un lac syldave **alors** je serai mouillé
[k] **Si** je suis mouillé **alors** je nage en maillot de bain dans un lac syldave

Inversement, expliquez pourquoi un nombre admettant un développement rationnel périodique est forcément rationnel.
Comment exprimer ces résultats en termes d'équivalence ?

$\sqrt{2}$ admet-il un développement décimal périodique ?

Si vous répondez correctement à cette question, alors vous commencerez à vous débrouiller en logique :-)

Les limites du développement décimal

Écrivez sous forme de fraction le nombre $1,\underline{9}$.
Des remarques ?

VIII - Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre, c'est sa distance à zéro.
Par exemple, -3 et 3 sont à la même distance de zéro : $\text{abs}(-3) = \text{abs}(3) = 3$
Complétez la phrase suivante :

Si un nombre x est .... ALORS $\text{abs}(x) = \ldots$ SINON $\text{abs}(x) = \ldots$

Avec XCAS

Complétez le programme suivant

```
abso(x):={
si ...... alors return(...); sinon return(...); fsi;
          }
```

IX - Le nombre d'or...

Épisode 1

Soit ABCD un carré de côté 1 .

1. Retrouver les étapes de la construction ci-dessous du rectangle ADFE , puis refaire la construction sur votre copie en choisissant pour unité 10 cm . (C et E sont sur un cercle de centre I , avec I milieu de [AB]) .

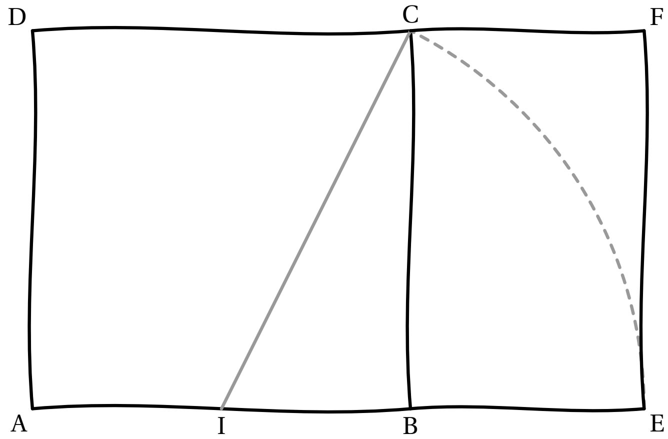


FIG. 1 – Rectangle d'or

2. En utilisant un théorème bien choisi, prouvez que AE $= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

3. Donnez une valeur approchée de $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ à l'aide de votre dessin. Quelle est à votre avis l'ordre de grandeur de la précision ?

4. À l'aide de la calculatrice, donnez une valeur arrondie à 10^{-5} près de $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ce nombre est noté Φ (lettre grecque appelée « phi ») et on l'appelle le nombre d'or . Le rectangle ADFE obtenu par la construction donnée est appelé un rectangle d'or .

Épisode 2

Sans calculatrice

1. *Sans calculatrice* simplifiez l'écriture de Φ sans racine carrée au dénominateur. Puis simplifiez l'écriture de $1 + \frac{1}{\Phi}$. Que remarquez-vous ?

2. *Sans calculatrice* simplifiez l'écriture de Φ^2 puis simplifiez l'écriture de $1 + \Phi$. Que remarquez-vous ?

Avec calculatrice

1. À l'aide de la calculatrice, donnez une approximation de

a) Φ

b) $a_1 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$

c) $a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

d) $a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

e) $a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$

En continuant le procédé, déterminez à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal d'étapes n pour que $\Phi - a_n \leqslant 10^{-9}$.

Avec XCAS

Que veut dire *SQuare RooT* en anglais ?

Analysez le programme suivant :

```
  a(n):={
A:=1.0;
k:=1;
Phi:=approx(1+sqrt(5))/2)
tantque Phi-A>10^(-n) faire A:=sqrt(1+A);k:=k+1; ftantque;
return(k);
}
```

2. À l'aide de la calculatrice, donnez une approximation de

a) $b_1 = 1 + \frac{1}{1}$

b) $b_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$

c) $b_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$

d) $b_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$

e) $b_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}$

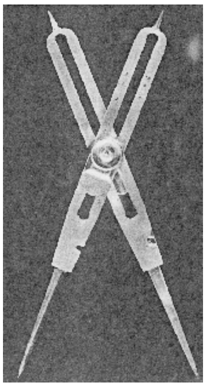
En continuant le procédé, déterminez à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal d'étapes n pour que $\Phi - a_n \leqslant 10^{-9}$.

Avec XCAS

Complétez le programme suivant

```
  b(n):={
B:=2.0;
k:=1;
Phi:=approx(1+sqrt(5))/2)
tantque abs(Phi-B)>10^(-n) faire B:=  ?????   ;k:=k+1; ftantque;
return(k);
}
```

Épisode 3 : le compas d'or



Voici un compas qu'utilisaient les architectes et les peintres pour garder des proportions dorées...

Comment pensez-vous que l'utilisaient ces artistes ?

Vous justifierez votre proposition en faisant une figure et en utilisant un théorème maintes fois utilisé au collège.

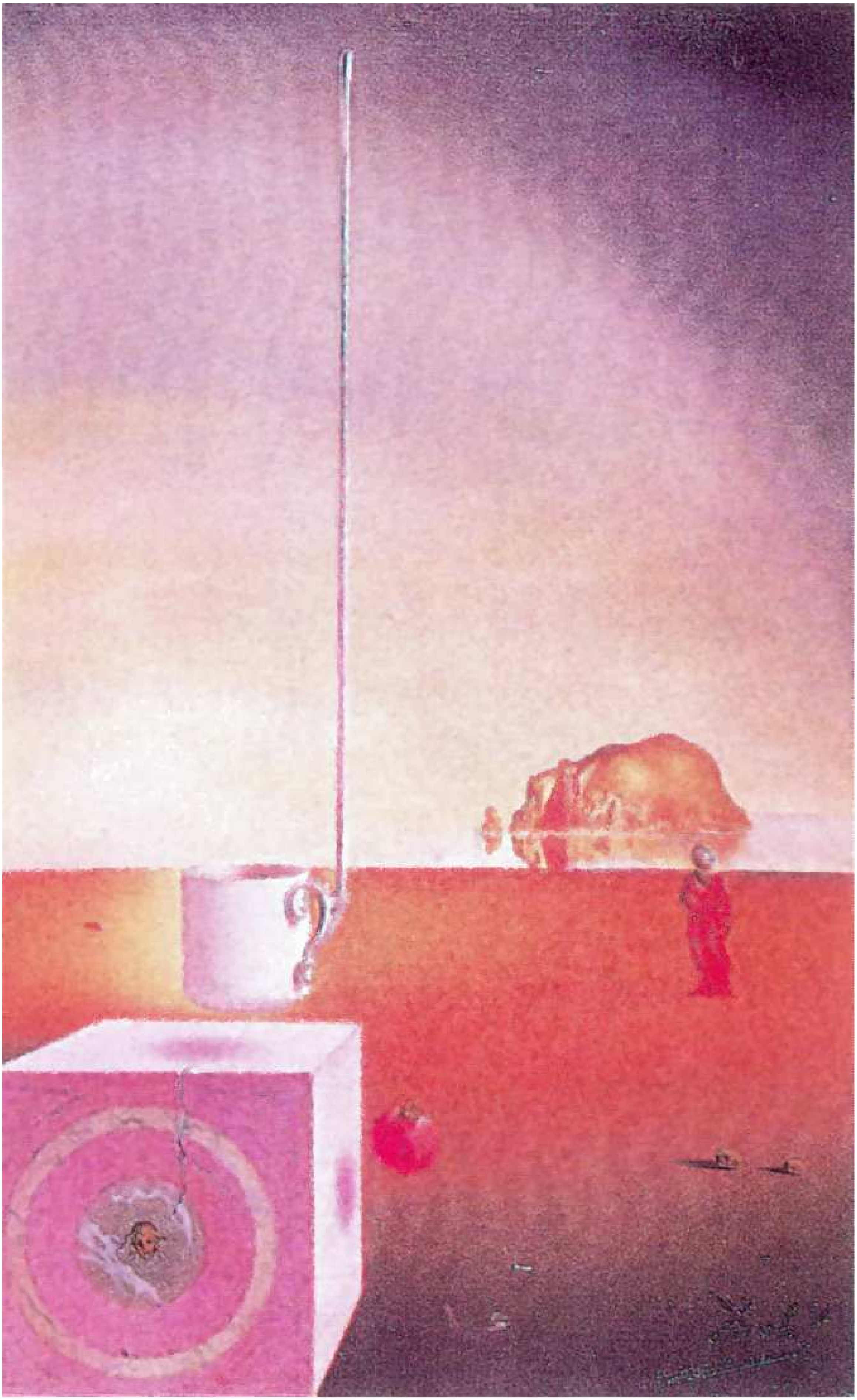
«S'il permet de vérifier rapidement les proportions d'un rectangle pour savoir s'il est un rectangle d'or , le compas de proportion peut aussi donner les puissances de Φ (il multiplie les longueurs par Φ !)» Expliquez comment on peut vérifier avec un compas de proportion que le rectangle de votre dessin de l'épisode 1 page 6 est un rectangle d'or, puis expliquez comment on obtient avec un compas d'or Φ^2, $1/_\Phi$?.

Épisode 4 : Dali et la proportion dorée

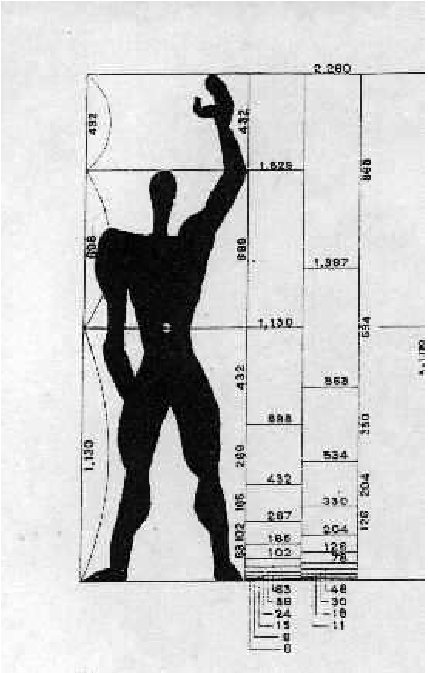
Ce tableau du peintre Salvador DALI s'appelle : « demi-tasse volante avec annexe inexplicable de cinq mètres de longueur ».

Le peintre s'est inspiré de la construction de rectangles d'or.

À l'aide de papier calque et d'un compas d'or que vous aurez construit, dénombrez le nombre de rectangles d'or présents sur ce tableau.



Épisode 5 : Rezé et le Nombre d'Or...



La Maison Radieuse (108m de long, 52m de haut et 19m de large) a été construite selon le principe du Modulor inventé par Le Corbusier.

Pour obtenir des appartements à taille humaine, l'architecte avait pris pour base un homme d'1m83 qui atteint 2m26 les bras levés : la hauteur des plafonds des appartements. Tel l'homme de Vitruve de Léonard de Vinci, des gravures au pied de l'immeuble rappellent ce principe.

Allez mener l'enquête au *Corbu* et prenez quelques photos pour démasquer le nombre d'or caché à Rezé...