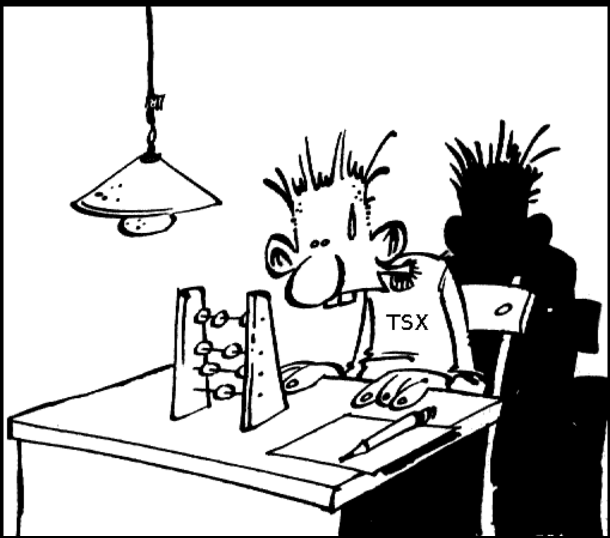
maths

Terminale S 2010-2011

Une année de mathématiques en $T^{ale}S$



Guillaume CONNAN

une année de mathématiques en T^{ale}S

cours avec exercices

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement Jean-Philippe Rouquès qui a guidé mes premiers pas dans le monde merveilleux des mathématiques en suivant ses Leçons particulières parues en 2002 et qui ont grandement influencées l'esprit de mes cours.

Je remercie « PG » du forum mathematex pour avoir fourni la classe LaTeX qui rend ce livre si coloré et agréable aux yeux.

Merci à Gérard Frugier pour l'impertinence de ses exercices qui m'a grandement inspiré en probabilité.

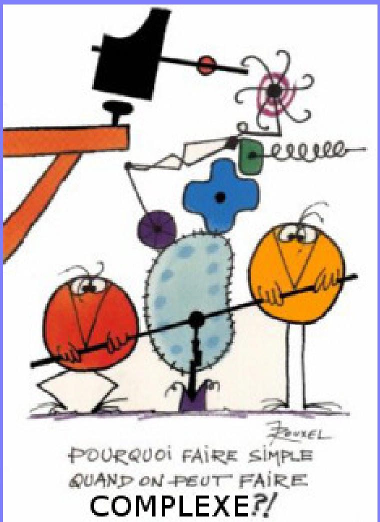
Merci aux auteurs des exercices alternatifs de DEUG qui ont eux aussi été sources d'inspiration.

Merci à Denis Le Fur pour sa relecture très attentive.

Guillaume Connan
Le 3 février 2010

CHAPITRE

1 COMPLEXES - Parte oane



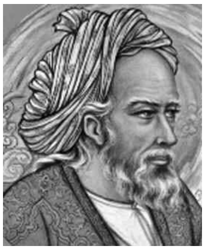
Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2. Ce n'est pas clair ? Alors commençons par parcourir le deuxième millénaire qui a vu mûrir petit à petit cette notion dans les esprits.

1 Approche historique

1 1 Les équations du second degré

Depuis plus de 3 000 ans on sait résoudre ce que l'on appelle aujourd'hui des équations du second degré. Cependant, très tôt, les Babyloniens, par exemple, sont restés bloqués au moment de résoudre des équations du troisième degré. Il faut attendre le XI^e^ siècle pour qu'un savant perse commence à entrevoir une méthode approchée de résolution.
Toute cette section doit beaucoup aux activités proposées par Anne Boyé dans *Images, imaginaires, imaginations* paru chez *Ellipses en 1998* (pages 122-173)

1 2 Résolution géométrique de l'équation x³+ax=b



Au XIe siècle vécut en Perse Ghiyath ed-din Abdoul Fath Omar Ibn Ibrahim al-Khayyam Nishabouri, ou plutôt : وبا نيدلا ثايغ ىروباشين مايخ ميهاربا نب رمع حتفلا, plus connu sous le nom d'Omar Khayyam. Il fut un poète joyeux et insouciant :

> *La Roue tourne, insoucieuse des calculs des savants.*
> *Renonce à t'efforcer vainement de dénombrer les astres.*
> *Médite plutôt sur cette certitude : tu dois mourir, tu ne rêveras plus,*
> *Et les vers de la tombe ou les chiens errants dévoreront ton cadavre.*

mais aussi un mathématicien visionnaire qui, avec quelques siècles d'avance sur les savants européens, découvrit des résultats importants concernant la résolution des équations du troisième degré. Son approche est géométrique et ne permet d'obtenir qu'une approximation graphique d'une solution.
Omar ne considérait que des équations à coefficients positifs.
Nous allons par exemple nous occuper de :

$$x^3 + ax = b \qquad \text{(E)}$$

où x, a et b désignent des nombres réels positifs mais jouant des rôles différents :

- x est l'*inconnue* de l'équation ; le but du jeu est en effet de déterminer les (ou des...) nombres réels positifs qui satisfont l'équation (E) ;
- a et b sont des *paramètres* : plutôt que d'étudier séparément des équations comme $x^3 + 2x = 1$, $x^3 + x = 7$, ..., Al Khayyam avait compris qu'elles pouvaient être résolues de manière similaire, quelque soit les valeurs positives prises par a et b. Les solutions de l'équation dépendront donc de ces paramètres.

Nous allons donc résoudre *qualitativement* l'équation (E).

1 2 a Paraboles et cercles

Dans le premier quadrant d'un repère orthonormal, considérons la branche de parabole d'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{a}}$ et le demi-cercle passant par l'origine du repère, centré sur l'axe des x positifs et de diamètre $\frac{b}{a}$.

Recherche

Démontrez que l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes, distinct de l'origine, est solution de (E).

1 2 b Paraboles et hyperboles

Voyons les choses autrement :

$$\text{(E)} \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2+a)=b$$
$$\text{(E)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+a=\frac{b}{x} \quad \text{ou} \quad x=0$$

Recherche

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

1 3 La Renaissance italienne

1 3 a Un saut dans l'espace-temps : combien l'équation x³+px+q=0 a-t-elle de solutions dans R ?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens du XVIe siècle eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif. Nous qui vivons au XXIe, nous avons des outils pour dénombrer les solutions.

Considérons donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires assure l'existence d'une valeur d'annulation de f car elle change de signe [a]

Recherche

Calculez la dérivée de f.

Quel est son signe ? Distinguons deux cas :

- **p** $\geqslant$ **0** : alors la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f ne s'annule qu'une fois.
- **p** $<$ **0** : alors la dérivée s'annule en deux valeurs opposées $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ que nous appellerons a et $-a$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

a. comme nous le verrons dans un prochain chapitre mais l'idée paraît naturelle !...

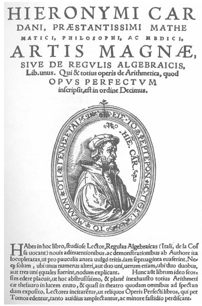
Maintenant, il faudrait connaître les signes respectifs de $f(-a)$ et $f(a)$ pour savoir si f s'annule sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[-a, a]$ et $[a, +\infty[$.

Recherche

Montrez que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$ en utilisant le fait que $f(a) = 0$.
Que vaut $f(a) \cdot f(-a) = ?$
Pourquoi a-t-on $f(a) < f(-a)$?
Entamez alors la discussion en distinguant trois cas (*Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois et...*)

1 3 b Résolvons ces équations

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.
Giralomo Cardano a établi en 1547 que cette solution est



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HIE. CAR.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x = u + v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v.

Recherche

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(\mathrm{E}_1)\ :\ x^3 - 36x - 91 = 0$

On voudrait faire de même avec $(\mathrm{E}_2)\ :\ x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

Recherche

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$.
Utilisons alors la formule de notre ami italien.

Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce :

Recherche

calculez $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3$

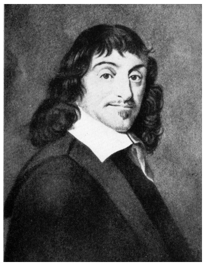
On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3 + 27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3 - 15x - 4$ par $x - \alpha$.

Recherche

Faites-le !
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Ainsi, à partir de ces travaux, les mathématiciens ont eu l'idée de prolonger les calculs algébriques aux expressions comportant des racines carrées négatives. Il faudra attendre le XIXe siècle pour que ces nombres « qui ne faisaient que passer » aient droit de cité et soient étudiés rigoureusement. Il faudra attendre la même époque pour que le héros romantique Évariste Galois propose une étude théorique des équations de degré supérieur à 2, mais ceci est une autre histoire...

1 4 Descartes et les imaginaires



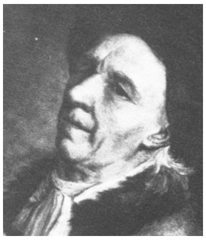
Presqu'un siècle après Cardano, Bombelli e tutti quanti, cette racine carrée de -1 continue (et continuera) de faire peur.
Voici ce qu'écrit Descartes en 1637

> *Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement **imaginaires** ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ay dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ; comme encore qu'on puisse imaginer trois eb celle-ci $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2 ; et pour les autres, quoy qu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.*

Recherche

Résolvez l'équation proposée par Descartes en tenant compte du renseignement qu'il donne.

1 5 Une notation malheureuse



En 1774, le mathématicien suisse Leonhard Euler remarque que la notation $\sqrt{-1}$ peut prêter à confusion.
En effet, dans le cas où *a est un nombre positif*, vous avez appris que $\sqrt{a}$ *désigne le nombre positif dont le carré vaut a*.
Cela se traduit par l'égalité :

$$\text{Pour tout réel positif } a,\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Recherche

- Vous avez de même établi que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. Sauriez-vous le démontrer en utilisant la définition rappelée ci-dessus ?
- Si l'on généralise cette dernière règle à tous les réels, à quoi devrait être égal :
  - ▹ $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$?
  - ▹ $\left(\sqrt{-1}\right)^2$?
- Qu'en pensez-vous ?
- Calculez de même $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3}$ de deux manières différentes.

Pour pallier à ces contradictions, Euler décide de désigner ce nombre $\sqrt{-1}$ par la lettre i (i comme...).
Ainsi :

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Cette notation ne sera pas adoptée tout de suite mais c'est elle dont l'usage est largement répandue de nos jours et que nous utiliserons.

Recherche

À l'aide de cette notation, écrivez le plus simplement possible les nombres qui ont pour carré -25 ; -2 ; $-\sqrt{3}$

1 6 Une représentation géométrique des nombres

1 6 a Une même idée jaillie de trois esprits indépendants

Il vous est naturel de représenter des nombres sur une droite graduée, de visualiser ce que peut être un nombre négatif, l'addition de deux nombres mais cela nous cantonne à nous promener sur une droite.
D'un autre côté, les nombres, depuis l'antiquité, ne trouve leur validité auprès des mathématiciens (et aussi de leurs élèves) que si on peut les « construire ».
Or, voilà que l'espace mathématique est de plus en plus envahi par ces nombres imaginaires qui continuent à tordre les esprits car on ne peut pas les « voir ».

Alors que les plus grands esprits depuis trois siècles essayent de donner vie à ces nouveaux nombres fort utiles, la lumière va venir en 1799 d'un modeste arpenteur-géomètre danois inconnu de tous (et qui le restera car il va publier son mémoire en danois et sera donc peu lu pendant un siècle avant d'être enfin traduit !), Caspar WESSEL (en photo), et presque simultanément (1806) d'un tout aussi modeste libraire suisse installé à Paris, Jean-Robert ARGAND, et enfin d'un prêtre français exilé en Angleterre et mathématicien amateur, Adrien-Quentin BUÉE.
Leurs résultats ne seront acceptés que lorsqu'ils seront re-découverts par des savants illustres dont le brillantissime GAUSS.

1 6 b Les Français rationnels

Pour les deux francophones, il s'agissait de trouver une signification géométrique plausible pour ces nombres.

Recherche

Considérez un triangle EIA quelconque et soit K le projeté orthogonal de E sur [IA]. Montrez que

$$\mathrm{KA} \cdot \mathrm{KI} = \mathrm{KE}^2$$

M. ARGAND nous demande alors de considérer un cercle de centre K, de diamètre [IA] et tel que E soit l'image de A par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On associe à K le nombre 0, à A le nombre 1. Il est alors naturel d'associer à I le nombre -1.

Recherche

Quel nombre peut-on associer à E ?

1 6 c Le Danois pratique

L'arpenteur WESSEL a lui une vision plus dynamique : il veut représenter des directions par des nombres, non plus sur une droite seulement (positifs et négatifs) mais sur un plan (le plan des cartes qu'il doit dessiner !).
Laissons-le parler :

> *Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire comment on devrait exprimer les segments de droites, si l'on voulait, au moyen d'une équation unique et entre*

> *un segment inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression représentant à la fois la longueur et la direction du segment inconnu.*

Recherche

Petite pause : comment appelleriez-vous ces fameux segments orientés dont parle l'auteur ?

> *[..] Essayons donc de généraliser la signification des opérations : n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage aux segments de droite de même sens ou de sens opposés [...]. Si en même temps qu'on prend cette liberté, on respecte les règles ordinaire des opérations, on ne tombe point en contradiction avec l'ancienne théorie des nombres, mais on la développe seulement, on s'accommode à la nature des quantités et on observe la règle générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisé à comprendre une théorie difficile.[...] Par là précisément [...] non seulement on réussit à éviter toutes les opérations impossibles et à expliquer ce paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible pour expliquer le possible, mais encore on parvient à exprimer la direction des segments de droite situés dans un même plan d'une manière aussi analytique que leur longueur. Or il faut convenir que la démonstration générale de théorèmes géométriques devient souvent plus facile lorsqu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la soumettre aux règles des opérations algébriques, que lorsqu'on est réduit à la représenter par des figures qui ne sont applicables qu'à des cas particuliers.* [b]

Voici résumé par un homme de terrain en quelques phrases ce qu'il faut comprendre sur ces nouveaux nombres qui sont l'objet de notre étude.

Recherche

Commentez ce court extrait de l'introduction de l'essai de Wessel.

1 6 d Somme des nombres imaginaires

Voici comment Wessel présente son addition de segments orientés :

> *L'addition de deux segments se fait de la manière suivante : on les combine en faisant partir l'un d'un point où l'autre se termine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue.* [c]

Recherche

Ça vous rappelle quelque chose ? Que pensez-vous des termes utilisés ?

1 6 e Produit de nombres imaginaires

Wessel établit les règles suivantes :

> *[...]*
>
> – *Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité ;*
>
> – *En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit [...] dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa*

b. Caspar Wessel, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, pp 3-5 de la traduction française disponible sur Gallica http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k99681g.r=caspar+wessel.langFR

c. Ibid page 7

déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.

Désignons par +1 l'unité rectiligne, par $+\epsilon$ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine : alors l'angle de direction de +1 sera égal à 0°, celui de −1 à 180°, celui de $+\epsilon$ à 90°et celui de $-\epsilon$ à -90°ou à 270° ; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :

$(+1)\cdot(+1) = +1$, $(+1)\cdot(-1) = -1$, $(-1)\cdot(-1) = +1$, $(+1)\cdot(+\epsilon) = +\epsilon$, $(+1)\cdot(-\epsilon) = -\epsilon$, $(-1)\cdot(+\epsilon) = -\epsilon$, $(-1)\cdot(-\epsilon) = +\epsilon$, $(+\epsilon)\cdot(+\epsilon) = -1$, $(+\epsilon)\cdot(-\epsilon) = +1$, $(-\epsilon)\cdot(-\epsilon) = -1$.

Il en résulte que ϵ est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires. [d]

Recherche

Illustrez par des schémas ce qui est clairement exposé par Wessel.

On peut donc représenter un nombre à l'aide d'une « longueur » et d'une « déviation » (que nous appellerons bientôt *module* et *argument*).

Recherche

Dans un repère orthonormal orienté, représentez les nombres « impossibles » suivant les préconisations de Wessel :

- $z_1 : \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_2 : \left[2, \frac{4\pi}{3}\right]$
- $z_3 : \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4 : \left[\frac{2}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$
- $z_5 : \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_6 : \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$
- $z_7 : \left[2, \frac{3\pi}{2}\right]$
- $z_8 : \left[1, \frac{5\pi}{2}\right]$
- $z_9 : \left[\frac{2}{3}, \pi\right]$
- $z_{10} : \left[\frac{3}{2}, 2\pi\right]$

Calculez ensuite le produit deux à deux des six premiers nombres en présentant vos résultats dans un tableau.

Construisez les « images » de $z_3 \cdot z_6$ et $z_1 \cdot z_3$.

Résolvez les deux équations suivantes :

$$(E_1) : \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cdot z = \left[3, \frac{\pi}{12}\right] \qquad (E_2) : \left[2, \frac{\pi}{3}\right] \cdot z = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$$

Écrivez la suite des puissances entières successives de $\left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$.
Faites de même avec $[r, \theta]$. Des commentaires ?

d. Ibid page 9

1 7 Gauss : clair et génial

Beaucoup de légendes circulent au sujet de Carl Friedrich Gauss, fils d'un modeste jardinier, qui aurait commencé sa carrière mathématique très tôt en donnant instantanément à dix ans la somme des termes d'une suite arithmétique très compliquée, aurait dit « dites lui d'attendre un moment que j'aie fini » alors qu'on lui annonçait que sa femme se mourrait au milieu d'une de ses démonstrations. Sa devise était *pauca sed matura* ce qui explique qu'il ait publié des résultats bien des années après en avoir eu l'intuition.

Ceci étant, il donna dans sa thèse de Doctorat parue en 1799 une première démonstration de ce qu'on appellera ensuite le *théorème fondamental de l'algèbre*, à savoir que toute équation de degré n a n solutions pouvant s'écrire sous la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b des nombres réels et i le fameux nombre dont nous parlons depuis le début de ce cours.

Il appellera plus tard (1831) l'ensemble de tous ces nombres *ensemble des nombres complexes*, les opérations valables dans $\mathbb{R}$ se prolongeant dans cet ensemble comme nous l'avons découvert dans les paragraphes précédents.

Recherche

Essayez d'écrire les nombres suivant sous la forme $x + \mathrm{i}y$ avec x et y des nombres réels et i le nombre de carré -1 :
$(3+5\mathrm{i})+(9-2\mathrm{i})$; $(3-4\mathrm{i})-(-1+\mathrm{i})$; $(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})$; $4(2+7\mathrm{i})$; $(4+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$
$(-2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$; $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$; $(a+\mathrm{i}b)^2$; $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$

Douze ans plus tard, il évoque dans une lettre au mathématicien Friedrich Bessel un résultat qu'il ne publiera qu'en 1831 :

> *De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où, chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente en même temps la quantité a + bi. Le passage se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières.*

Recherche

Que vous rappelle l'idée exposée par Gauss ?
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, placez les points correspondant à :

$$1\ ;\ \mathrm{i}\ ;\ -\mathrm{i}\ ;\ 2-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\ ;\ 3-2\mathrm{i}\ ;\ \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

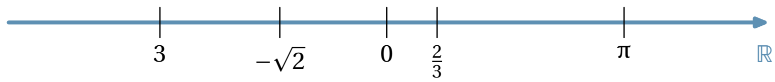
Les nombres réels sont-ils des nombres complexes ? Sur quelle partie du plan complexe se représentent-ils ? Quelle propriété caractérise les nombres représentés sur l'axe des ordonnées du plan complexe ?
Comment peut-on rapprocher les formulations $[r,\theta]$ et $a+ib$?

Pour finir, une dernière citation de Gauss qui nous permettra de méditer sur les aléas du progrès scientifique :

> *Jusqu'à ce jour on avait surtout discuté sur la théorie des nombres complexes d'un mauvais point de vue, on avait senti une obscurité mystérieuse. Mais la raison de ceci est en grande partie due à une dénomination maladroite. Si on n'avait pas caractérisé* $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ *par unité positive, négative, imaginaire (ou plus fort impossible), mais par unité directe, inverse et latérale, l'obscurité mentionnée n'aurait pas surgi.*

2 Approche « moderne »

Mathémator : Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Faute d'outils plus rigoureux [e], on vous a présenté en classe de seconde l'ensemble des nombres réels comme étant l'ensemble des abscisses des points de la droite orientée ci-dessus.
Vous utilisez depuis l'école primaire ces nombres et les opérations usuelles qui leur sont associées, addition et multiplication, sans trop vous poser de questions. Rappelons quelques propriétés [f] :

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\cdot 1=1\cdot x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

e. Vous les verrez peut-être un jour...Il y a plusieurs manières de construire l'ensemble $\mathbb{R}$. Presque toutes définissent un nombre réel comme étant la limite d'une suite d'approximations par des rationnels.

f. Ces propriétés donnent à $\mathbb{R}$ une structure de *corps* : au temps préhistorique des mes années de collège, cette notion algébrique de corps était vue en 4e et maintenant en math sup. On comprend pourquoi tant de vos parents ont été effrayés par les mathématiques...

Tout ceci est bien naturel. Maintenant, on voudrait décoler de l'axe des réels et faire le même travail en dimension 2, c'est-à-dire pouvoir calculer avec des couples de nombres du style (x, y).

Téhessin : Ça veut dire qu'on travaille maintenant sur le plan tout entier ?

Mathémator : C'est ça. On note $\mathbb{R}^2$ cet ensemble : l'ensemble des coordonnées des points du plan ! Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Téhessin : Ben pour l'addition, on fait $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Mathémator : Pourquoi pas ! Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Téhessin : On a un élément neutre : (0,0) car $(x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$.

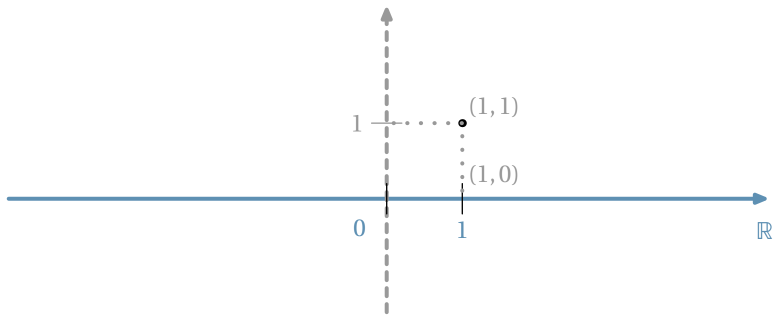
Mathémator : Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Téhessin : Et pour le symétrique, on prend $(-x, -y)$ car $(x, y)+(-x, -y) = (0, 0)$ l'élément neutre.

Mathémator : En effet. Et pour la multiplication ?

Téhessin : Ça doit être pareil : $(x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$ avec $(1, 1)$ comme élément neutre.

Mathémator : Pourquoi pas, mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x, y) \cdot (1,0) = (x, y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

Téhessin : Fichtre ! Essayons : $(x, y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$. Ça marche.

Mathémator : Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0, 0)$ admet un inverse

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Téhessin : Je suis impressionné par ce petit exposé, mais je ne vois pas trop le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent.

Mathémator : Et bien observez $(0, 1)$ et élevez-le au carré.

Téhessin : Allons-y : $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$, bon et alors ?

Mathémator : Alors $(-1, 0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0, 1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellement en utilisant les opérations décrites précédemment.

Téhessin : Naturellement, c'est beaucoup dire ! C'est un peu compliqué comme multiplication.

Mathémator : Je vous l'accorde. C'est pourquoi nous allons adopter une autre tactique. À chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.
L'idée vient de l'observation *intuitive*[g] :

$$« (x,y) \curvearrowright x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1) \curvearrowright x\cdot 1+y\cdot\sqrt{-1} \curvearrowright x+y\sqrt{-1} »$$

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+\mathrm{i}y \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathcal{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres complexes}
\end{array}$$

Pour se simplifier la vie, nous allons donner un nom à cet ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.. Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prolongeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

Téhessin : Si vous le dites : $(x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y') = x+\mathrm{i}y+x'+\mathrm{i}y' = (x+x')+i(y+y')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, mais en plus simple.

Téhessin : Et $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = xx'+\mathrm{i}xy'+\mathrm{i}yx'+\mathrm{i}^2yy'$

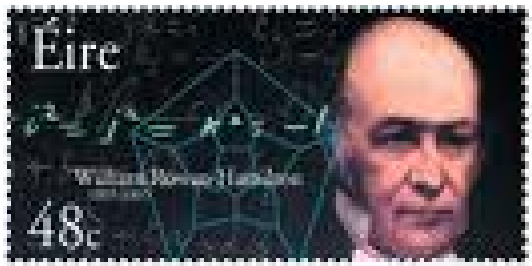
Mathémator : N'oubliez pas que $\mathrm{i}^2 = -1$

Téhessin : Alors $(x+\mathrm{i}y)\cdot(x'+\mathrm{i}y') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$

Mathémator : Comme nous avions $(x,y)\cdot(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.
Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Si vous avez compris ces relations, tout ce qui va suivre va vous paraître « trop » simple....

2 1 Hamilton et les couples de nombres



g. Les $\curvearrowright$ renvoient à une notion extrêmement importante et rigoureuse : la notion d'*isomorphisme*. Deux ensembles sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre les deux et que cette bijection « conserve » les opérations. Cela permet de travailler *à isomorphisme près* sur un ensemble compliqué en le remplaçant par un ensemble isomorphe plus approprié à la situation. C'est ce qui se passe entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton publie en 1837 *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples*[h].
En voici un extrait qui n'est pas sans rappeler la discussion précédente :

On the Addition, Substraction, Multiplication, and Division, of Number-Couples, as combined with each other.

6. Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles :

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2); \qquad (52.)$$

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2); \qquad (53.)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2); \qquad (54.)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right). \qquad (55.)$$

Were these definitions even altogether arbitrary, they would at least not contradict each other, nor the earlier principles of Algebra, and it would be possible to draw legitimate conclusions, by rigorous mathematical reasoning, from premises thus arbitrarily assumed : but the persons who have read with attention the foregoing remarks of this theory, and have compared them with the Preliminary Essay, will see that these definitions are really not arbitrarily chosen, and that though others might have been assumed, no others would be equally proper.

With these definitions, addition and subtraction of number-couples are mutually inverse operations, and so are multiplication and division ; and we have the relations,

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2), \qquad (56.)$$

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2), \qquad (57.)$$

$$(b_1, b_2)\{(a_1', a_2') + (a_1, a_2)\} = (b_1, b_2)(a_1', a_2') + (b_1, b_2)(a_1, a_2) : \qquad (58.)$$

we may, therefore, extend to number-couples all those results respecting numbers, which have been deduced from principles corresponding to these last relations. For example,

$$\{(b_1, b_2) + (a_1, a_2)\} \cdot \{(b_1, b_2) + (a_1, a_2)\} = (b_1, b_2)(b_1, b_2) + 2(b_1, b_2)(a_1, a_2) + (a_1, a_2)(a_1, a_2), \qquad (59.)$$

in which

$$2(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (2, 0)(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2)(a_1, a_2) + (b_1, b_2)(a_1, a_2); \qquad (60.)$$

for, in general, we may mix the signs of numbers with those of number-couples, if we consider every single number a as equivalent to a pure primary number-couple,

$$a = (a, 0). \qquad (61.)$$

When the pure primary couple $(1, 0)$ *is thus considered as equivalent to the number* 1*, it may be called, for shortness, the primary unit ; and the pure secondary couple* $(0, 1)$ *may be called in like manner the secondary unit.*

We may also agree to write, by analogy to notations already explained,

$$\begin{aligned} (0,0) + (a_1, a_2) &= +(a_1, a_2), \\ (0,0) - (a_1, a_2) &= -(a_1, a_2); \quad (62.) \end{aligned}$$

h. : http ://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/PureTime/PureTime.pdf

> *and then* $+(a_1, a_2)$ *will be another symbol for the number-couple* (a_1, a_2) *itself, and* $-(a_1, a_2)$ *will be a symbol for the opposite number-couple* $(-a_1, -a_2)$*. The reciprocal of a number-couple* (a_1, a_2) *is this other number-couple,*
>
> $$\frac{1}{(a_1,a_2)} = \frac{(1,0)}{(a_1,a_2)} = \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) = \frac{(a_1,-a_2)}{a_1^2+a_2^2}. \qquad (63.)$$
>
> *It need scarcely be mentioned that the insertion of the sign of coincidence = between any two number-couples implies that those two couples coincide, number with number, primary with primary, and secondary with secondary ; so that an equation between number-couples is equivalent to a couple of equations between numbers.*

Hamilton inventera par la suite la théorie des *quaternions*, qui en quelque sorte des « super-complexes » mais en dimension 4 ! Il introduira d'ailleurs à cette occasion le terme de *vecteur*.

2 2 Cinéma

Un magnifique film résume nos premières aventures. Il se trouve à l'adresse suivante, au chapitre 5 :

http ://www.dimensions-math.org/Dim_reg_F.htm

3 Vocabulaire et premières propriétés

Théorème 1 - 1

Ensemble $\mathbb{C}$
On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

3 1 Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathfrak{Re}(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathfrak{Im}(z)$

Danger

$\mathfrak{Im}(z)$ est un nombre réel.

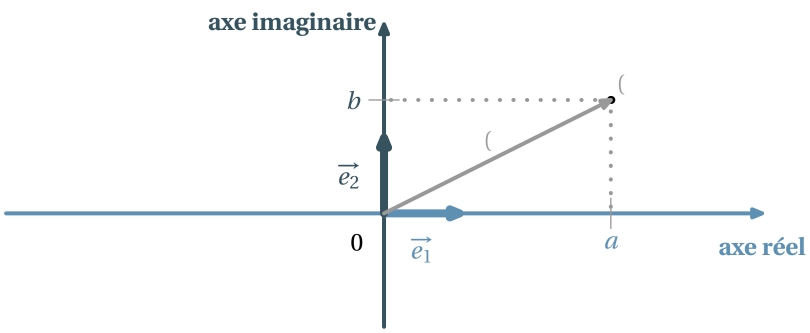
Aparté

À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?
Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0+i\cdot 0$. Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0 \iff \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 7x-32y+1=0 \end{cases}$$

3 2 Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$



À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent $M(z)$.

Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_{M}.
Enfin, à tout vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ de coordonnées (a, b) dans la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est associé une affixe $z_{\overrightarrow{u}} = a + ib$

3 3 Premiers calculs géométriques

– Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b'), alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + a')\overrightarrow{e_1} + (b + b')\overrightarrow{e_2}$, donc

Propriété 1 - 1

affixe d'une somme

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$$

– De même, si λ est un nombre réel

Propriété 1 - 2

affixe du produit par un réel

$$z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$$

– Alors, si I est le **milieu** du segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, on a

Propriété 1 - 3

affixe du milieu

$$z_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}(z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}})$$

– Pour tous points A et B

Propriété 1 - 4

affixe d'un vecteur

$$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$$

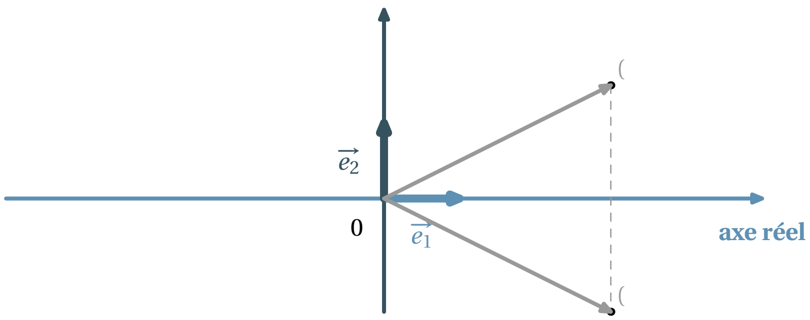
3 4 Conjugué d'un complexe

Définition 1 - 1

Conjugué
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne



Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes :

Propriété 1 - 5

- M(z) et M′($\overline{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\in\mathbb{R}\iff z=\overline{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\iff z=-\overline{z}$
- $\mathfrak{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$
- $\mathfrak{Im}(z)=\dfrac{1}{2}(z-\overline{z})$
- Si $z=a+ib$, alors $z\overline{z}=a^2+b^2$

3 5 À quoi servent les conjugués ?

3 5 a À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z}=z$, alors on en conclut que z est réel. **Pourquoi ?**

3 5 b À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z\cdot\overline{z}=(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2-(\mathrm{i}b)^2=a^2+b^2$$

Exemple

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2+\mathrm{i}$:
$\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}\cdot\dfrac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{4+1}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}i$

3 6 Conjugué de l'inverse

Sachant qu'un complexe non nul z admet une forme algébrique $a+ib$, on sait maintenant trouver la forme algébrique de son inverse :

et donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=$

3 7 Module d'un nombre complexe

Définition 1 - 2

Module
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

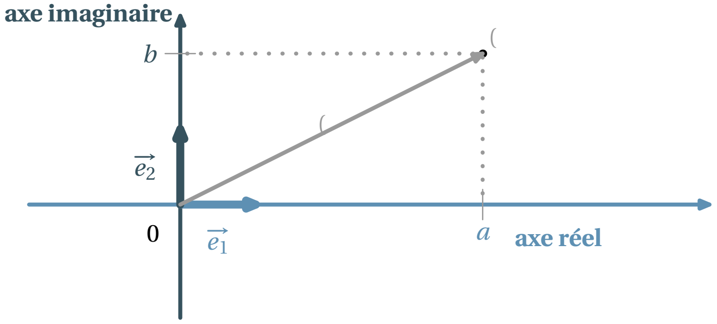
$$|z|=\sqrt{z\ \overline{z}}$$

Remarque

- Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\,\overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.

  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

3 7 a Interprétation géométrique



Nous venons de voir que, si $z = a + ib$, alors

Propriété 1 - 6

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2 + b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou encore la longueur OM.

Propriété 1 - 7

$$|z_{\mathrm{M}}| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \mathrm{OM} \qquad \left|z_{\overrightarrow{u}}\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\|$$

3 7 b Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 1 - 8

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| =$
- $\mathfrak{Re}(z) \leqslant |z|$
- $\mathfrak{Im}(z) \leqslant |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 1 - 9

Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137.
Pour les curieux, voici comment cela se démontre.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.
Or $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2$
D'autre part $(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$
Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».
Or $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathcal{R}e(z_1z_2) \leqslant 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

4 Résolution d'équations du second degré

4 1 Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \alpha$

4 1 a Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

- $\boldsymbol{\alpha \geqslant 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff z^2 - \alpha = (z-\sqrt{\alpha})(z+\sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions[i] sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$

Exemple

On connaît : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$

- $\boldsymbol{\alpha < 0}$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - \mathrm{i}\sqrt{-\alpha})(z+\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$

Exemple

C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2\mathrm{i}$ ou $z = 2\mathrm{i}$

4 1 b Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Exemple

Cherchons les racines carrées de $4+3\mathrm{i}$, à savoir les nombres $a+\mathrm{i}b$ tels que

$$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 4+3\mathrm{i}$$

Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{i})$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{i})$

i. LA solution si $\alpha = 0$

4 2 Résolution de ax²+bx+c=0 avec a, b et c des réels

C'est comme en 1$^{\text{ère}}$:

$$ax^2+bx+c=0 \iff a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

Tout dépend donc du signe de b^2-4ac, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 1 - 2

Résolution de $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$. Notons

$$\Delta = b^2-4ac$$

le **discriminant** de l'équation et δ un *complexe* vérifiant

$$\delta^2=\Delta$$

– Si $\Delta=0$, il existe une unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$

– Si $\Delta>0$, il existe deux solutions réelles $x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$

– Si $\Delta<0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}$

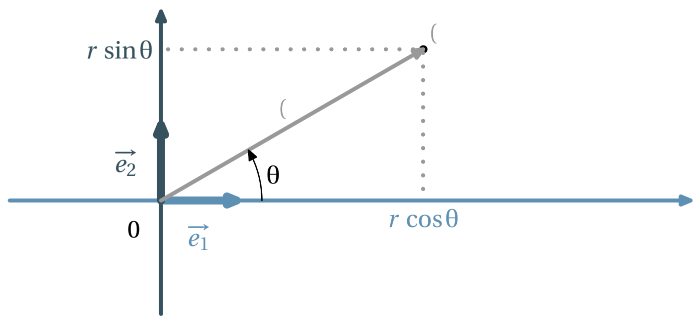
$$\boxed{\textbf{Dans tous les cas } x=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}\,!}$$

5 FORME TRIGONOMÉTRIQUE

5 1 Argument d'un complexe non nul

5 1 a Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre $\mathbb{C}$ et le Plan. Nous avions privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires** comme vu lors de l'exploration du mémoire de Wessel. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).



Ainsi, (r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M du nombre complexe z, on a $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

Définition 1 - 3

forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Remarque

notation en électronique
Les électroniciens notent souvent ce résultat sous la forme : $z = [r, \theta]$

5 1 b Congruence

Vous rencontrerez souvent la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k \cdot 2\pi$.

Remarque

congruence modulo 2π

$$x \equiv y[2\pi] \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi$$

Par exemple, vous savez que $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{7\pi}{3}[2\pi]$: dessinez un cercle trigonométrique pour vous en convaincre.

5 1 c Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π. Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z, qu'on notera $\arg z$. On retiendra :

Propriété 1 - 10

argument

$$\arg z \equiv \theta[2\pi]$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32\mathrm{i} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

5 1 d Des formes trigonométriques de référence

- $1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|\mathrm{i}| = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1 + \mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3} + \mathrm{i}| = 2$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3} + \mathrm{i}) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

5 2 Correspondance forme algébrique - forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $a+ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors on a d'une part :

Propriété 1 - 11

forme algébrique connaissant la forme trigonométrique
$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$

et d'autre part $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2+b^2}$ sera non nul également. Ainsi, nous pouvons écrire z sous la forme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

Propriété 1 - 12

forme trigonométrique en fonction de la forme algébrique
$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

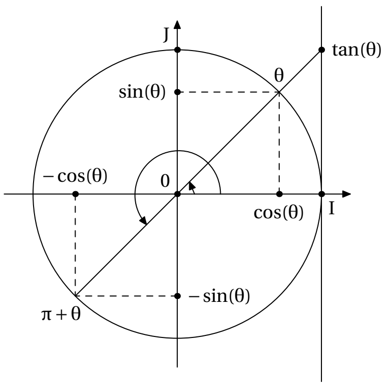
Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a+ib$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1, etc.
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide des touches $\boxed{\mathrm{COS}^{-1}}$ et $\boxed{\mathrm{SIN}^{-1}}$, ou encore avec $\boxed{\mathrm{TAN}^{-1}}$. En effet, $\cos(\theta)$ étant non nul[j],

Propriété 1 - 13

argument en fonction de la forme algébrique

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a}$$

ce qui déterminera une valeur de l'argument modulo π.



j. Sinon, on sait qui est θ...

Il suffira ensuite de considérer le signe de $\cos(\theta)$ ou de $\sin(\theta)$ pour savoir à qui on a affaire.

5 3 Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'\Big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta)'\Big)$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

Propriété 1 - 14

argument d'un produit
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété 1 - 15

Propriétés algébriques des arguments

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\,[2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème 1 - 3

Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que :

Remarque

- Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes ;
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

6 De l'objet au complexe

6 1 Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

Remarque

caractérisation d'un cercle

$$\mathrm{M}(z)\in\mathcal{C}(\mathrm{A},\mathrm{R}) \iff |z-z_{\mathrm{A}}|=\mathrm{R}$$

6 2 Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si AB = AC donc

Remarque

triangle isocèle

ABC isocèle de sommet principal A $\iff |z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|=|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}| \iff \left|\dfrac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}\right|=1$

6 3 Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}|^2=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|^2+|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{e_1}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=-\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=-\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\right)+\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}\right)=$$

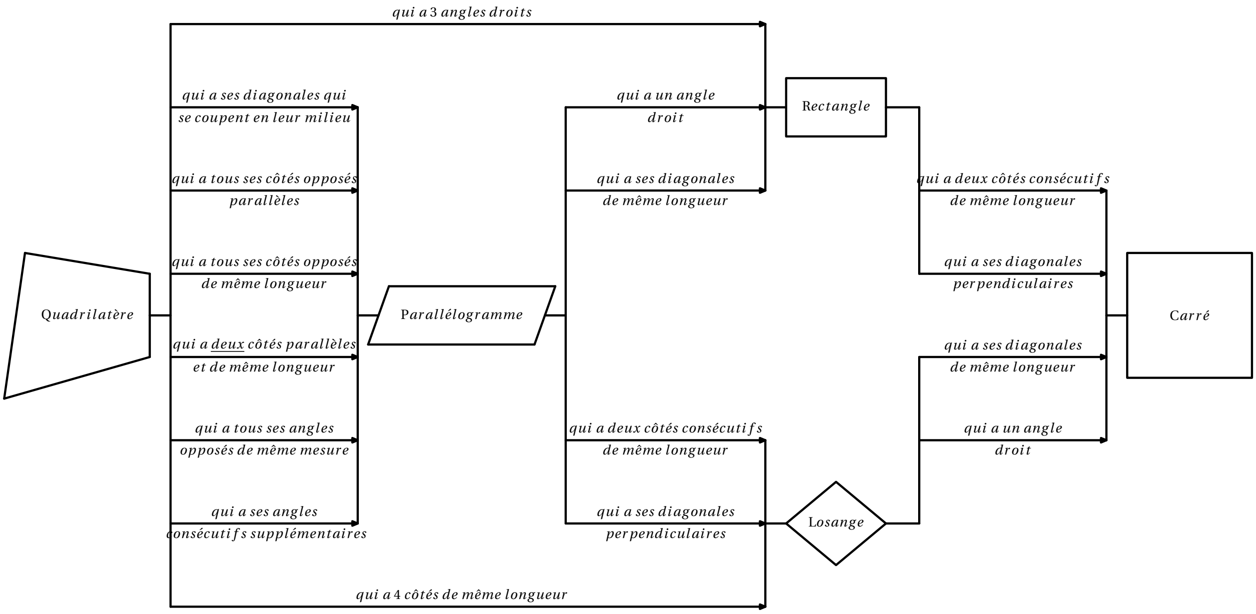
Remarque

triangle rectangle

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

6 4 Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Petite révision de collège...



qu'il vous suffira d'adapter connaissant ce qui précède.

7 Du complexe à l'objet

7 1 Que représente z-32+5i ?

Soit A le point d'affixe $32-5\mathrm{i}$ et M le point d'affixe z, alors $z-32+5\mathrm{i} = z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}$

7 2 Comment interpréter |z-32+5i|=3 ?

D'après ce qui précède, on aboutit à AM = 3 : il s'agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

7 3 Comment interpréter |32+i z|=5 ?

$|32+\mathrm{i}z| = |i(-32\mathrm{i}+z)| = |i|\cdot|z-32\mathrm{i}| = |z-32\mathrm{i}| = \mathrm{BM}$ avec M le point d'affixe z et B le point d'affixe 32i. On retombe donc sur un cercle.

7 4 Comment interpréter |z-a|=|z-b| ?

Soit M d'affixe z, A d'affixe a et B d'affixe b. Alors l'égalité se traduit par AM = BM, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

7 5 Que se cache-t-il derrière le quotient (zC-zA)/(zB-zA) ?

Il suffit de remarquer que $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}}{z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

- $\arg(\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}) = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AC}}) - (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})$
- $\left|\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}\right| = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

Dans d'autres cas, vous serez confrontés à l'interprétation d'une égalité du style $\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = \lambda z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$, donc

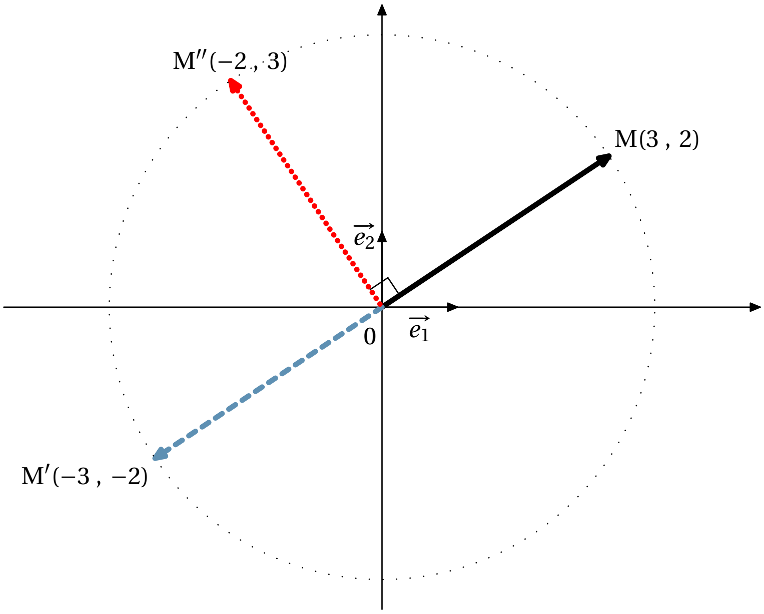
- si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et donc A, B et C sont alignés.
- si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = \pm|\lambda| i z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ et donc $\arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} + \arg\left(z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)\ [2\pi]$ c'est à dire $(\mathrm{AC})\perp(\mathrm{AB})$
- si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

7 6 Comment interpréter qu'un angle de vecteurs est droit ?

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

7 7 En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3+2\mathrm{i}$, alors $-1\cdot z = -3-2\mathrm{i}$ et $i\cdot z = 3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = -2+3\mathrm{i}$. Notons M, M′ et M″ les points d'**affixes** respectives z, $-z$ et iz

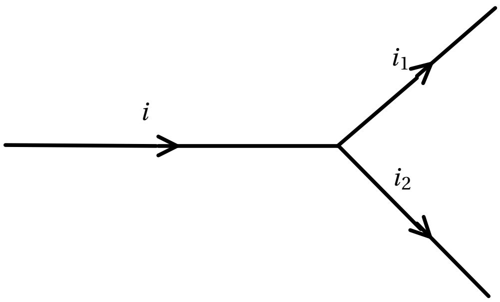


Ô monde merveilleux ! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par −1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i, c'est à dire une multiplication par $i^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, *i.e.* un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

8 Complexes et électronique

8 1 Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante :



Le courant initial i et les deux courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation α. Si $i_k = \widehat{\mathrm{I}_k}\sin(\alpha t+\varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace [k] de i_k on a

$$\underline{\mathrm{I}_k} = \mathrm{I}_k\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi\right)$$

avec $\widehat{\mathrm{I}_k} = \sqrt{2}\mathrm{I}_k$

k. Nous apprendrons à la calculer quand nous aurons étudié le calcul intégral

Aparté

En électronique, on note « j » le nombre de carré -1 pour ne pas le confondre avec le « i » de l'intensité...

La *loi des nœuds* nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + \mathrm{i}_2(t)$.
Il est temps à présent de se souvenir d'une petite formule de trigo :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Vous pouvez alors montrer que, d'une part

$$i_1(t) + \mathrm{i}_2(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1 \cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2 \cos\varphi_2\right)\sin(\alpha t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}_1 \sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2 \sin\varphi_2\right)\cos(\alpha t)$$

et d'autre part

$$i(t) = \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi\right)\sin(\alpha t) + \left(\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi\right)\cos(\alpha t)$$

puisque la relation $i(t) = i_1(t) + \mathrm{i}_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\sin\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1 \sin\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2 \sin\varphi_2$$

(pourquoi ?) et en $t = \frac{\pi}{2\alpha}$ on obtient

$$\sqrt{2}\mathrm{I}\cos\varphi = \sqrt{2}\mathrm{I}_1 \cos\varphi_1 + \sqrt{2}\mathrm{I}_2 \cos\varphi_2$$

Vous pouvez alors expliquer pourquoi $\underline{\mathrm{I}_0} = \underline{\mathrm{I}_1} + \underline{\mathrm{I}_2}$
dans le cas de signaux de même pulsation. Cela va nous rendre de grands services, car il va être beaucoup plus simple d'additionner des complexes plutôt que des grandeurs sinusoïdales.

8 2 Exemple

Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $i_1 = 3\sqrt{2}\sin\left(\alpha t - \frac{\pi}{6}\right)$
Alors vous obtenez d'une part

$$\underline{\mathrm{I}_1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}(1+\mathrm{j})$$

et d'autre part

$$\underline{\mathrm{I}_2} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - \mathrm{j}\right)$$

Nous en déduisons que

$$\underline{\mathrm{I}\ } = \underline{\mathrm{I}_1} + \underline{\mathrm{I}_2} = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{j}\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$$

On ne reconnais pas de lignes trigonométriques connues. Nous allons donc utiliser des valeurs approchées.

$$\underline{\mathrm{I}\ } \approx 4,012289774 - 0,08578643763\mathrm{j}$$

Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ 4,01 Ampères et une mesure de son argument -0,021 radians, et donc

$$i(t) \approx 4,01\sqrt{2}\sin(\alpha t - 0,021)$$

8 3 Impédance complexe

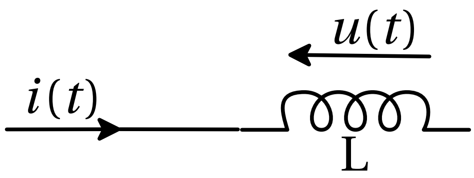
Vous verrez un jour que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$$

avec R la resistance et X la réactance du dipôle..

8 4 Cas d'une bobine parfaite

On considère la situation suivante :



Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. Or $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)$, donc

$$\begin{aligned}
u(t) =& L\frac{\mathrm{d}\left(I\sqrt{2}\sin(\alpha t + \varphi)\right)}{\mathrm{d}t} \\
=& LI\sqrt{2}\alpha\cos(\alpha t + \varphi) \\
=& L\alpha I\sqrt{2}\sin\left(\alpha t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{car} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que, d'une part

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(\underline{Z}) &= \operatorname{Arg}(\underline{U}) - \operatorname{Arg}(\underline{I}) \\
&= \varphi + \tfrac{\pi}{2} - \varphi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
|\underline{Z}| &= \tfrac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} \\
&= \tfrac{IL\alpha}{I} \\
&= L\alpha
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\underline{Z} = jL\alpha$$

car je vous rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$

Montrez de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $\frac{1}{jc\alpha}$ sachant que par définition $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

.

9 FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE

- **Formules**

  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

  $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, pour $a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

  $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, pour $a-b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$

- **Transformation de produits en somme**

  $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

  $\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

  $\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2} \cdot (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

- **Transformation de sommes en produits**

  $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

  $\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2})$

  $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p+q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p-q}{2})$

  $\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin(\dfrac{p-q}{2}) \cdot \cos(\dfrac{p+q}{2})$

- **Formules de duplication**

  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

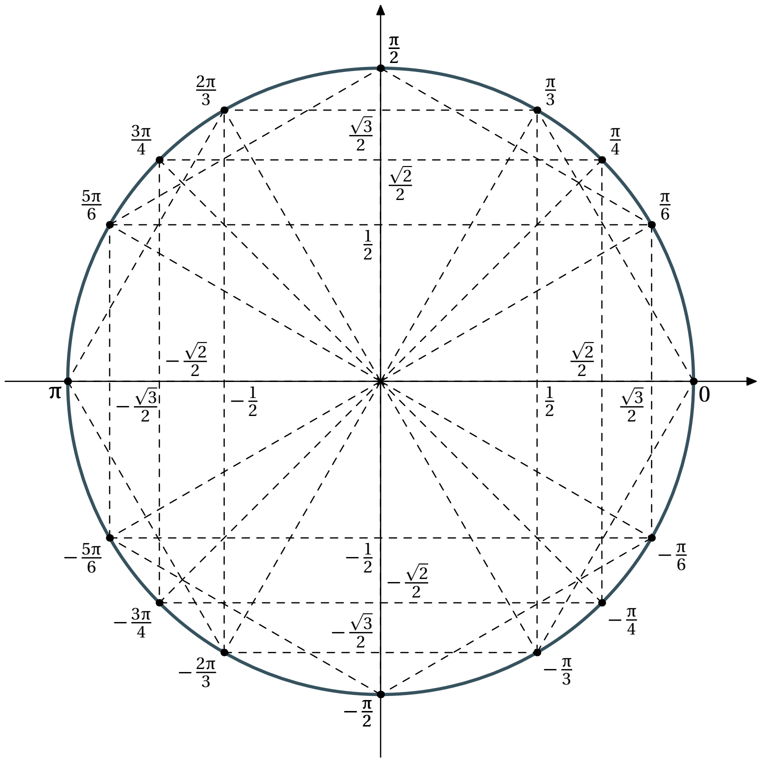
  $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$

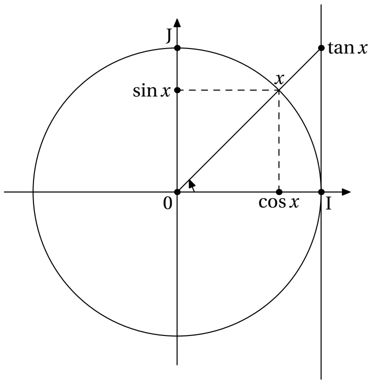
  $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

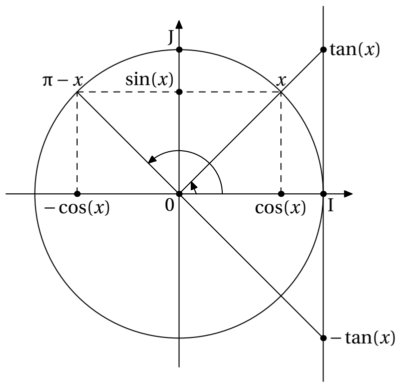
  Avec $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, on a :

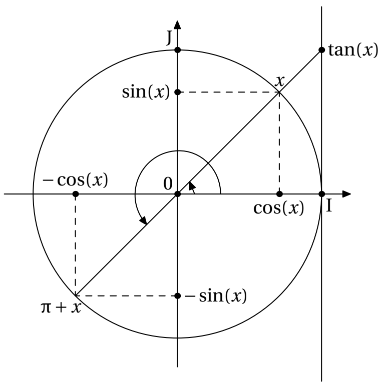
  $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

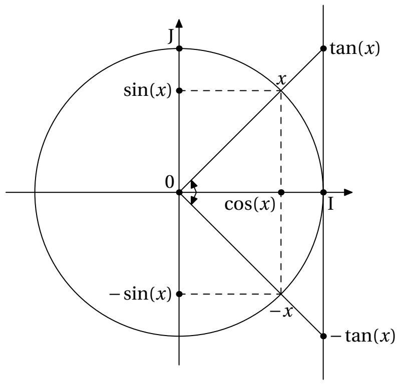
.


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
π
0
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{6}$


J
$\tan x$
$\sin x$
x
0
$\cos x$
I


J
$\tan(x)$
$\pi - x$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\tan(x)$


J
$\tan(x)$
$\sin(x)$
x
$-\cos(x)$
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$\pi + x$

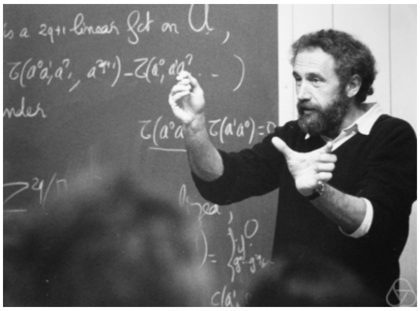

J
$\tan(x)$
$\sin(x)$
x
0
$\cos(x)$
I
$-\sin(x)$
$-x$
$-\tan(x)$

10 XCAS et les Complexes

Vous pouvez vous servir de XCAS comme super-calculatrice pour vérifier vos calculs stakhanovistes.
Commencez par le télécharger à cette adresse :

http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ parisse/giac_fr.html

Ensuite, méditez cette pensée d'Alain Connes, membre de l'Académie des sciences, Professeur au Collège de France, à l'I.H.E.S. et à l'Université de Vanderbilt aux États-Unis.
Alain Connes a notamment reçu la Médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du C.N.R.S. en 2004.



Quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.

Alain Connes - *Sciences et imaginaire*

Le nombre i se note `i`. Il ne faut pas oublier l' `*` de la multiplication. Ensuite, les notations sont classiques :

```
z:=(3+2*i)*(1+2*i)
re(z);
im(z);
abs(z);
conj(z);
arg(1+i)
```

Pour obtenir un nombre sous forme algébrique, on peut utiliser evalc (évaluer en tant que complexe).
Pour résoudre une équation, on utilise
`resoudre_dans_C(equation,inconnue)`
ou bien
`csolve(equation,inconnue)` :

```
resoudre_dans_C(z^2+z+1=0,z)
```

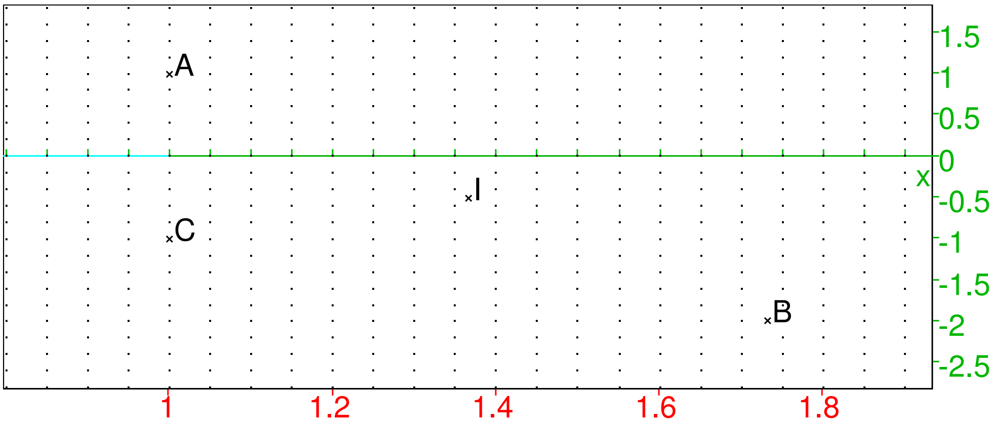
Pour vérifier qu'un nombre est solution d'une équation :

```
f(z):=z^2+1;
f(i)
```

Pour factoriser et développer on utilise `factoriser` et `developper`...
Pour dessiner, on ouvre une fenêtre de géométrie en tapant Alt + G :

```
A:=point(1+i);
B:=point(sqrt(3)-2*i);
I:=milieu(A,B);
affixe(I);
evalc(affixe(I));
C:=point(conj(affixe(A)));
```

et on obtient :



EXERCICES

Énigmes historiques

1 - 1 Résolution d'une équation de degré 3

On veut résoudre l'équation :

$$(\mathrm{E})\ :\ x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

par la méthode de CARDAN.

a. *Soit a un réel et $\mathrm{X} = x - a$. Déterminez a pour que les solutions de (E) soient les solutions d'une équation de la forme $\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0$.*

b. *Résoudre cette nouvelle équation d'inconnue X et en déduire les solutions de (E).*

1 - 2 Leibniz se trompe !

Une des conséquences du théorème fondamental de l'algèbre démontré par GAUSS *est de pouvoir affirmer que tout polynôme dont les coefficients sont réels peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.*

En 1702, le grand LEIBNIZ *conjecture pourtant que ce résultat est faux en proposant les égalités suivantes avec a un réel et le fameux $\sqrt{-1}$ que nous n'utilisons plus :*

$$\mathrm{X}^4 + 1 = \left(\mathrm{X}^2 - \sqrt{-1}\right)\left(\mathrm{X}^2 + \sqrt{-1}\right)$$
$$= \left(\mathrm{X} + \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(\mathrm{X} - \sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(\mathrm{X} + \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(\mathrm{X} - \sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

Que pensez-vous des solutions de l'équation $\mathrm{X}^4 + 1 = 0$?

LEIBNIZ *affirme alors que, quels que soient les deux facteurs qu'on regroupe, cela ne donnera jamais un facteur réel.*

Cette utilisation du symbole $\sqrt{}$ est décidément trompeuse. Menez l'enquête en évitant les $\sqrt{}$ et en utilisant plutôt i.

Exercices stakhanovistes

1 - 3 Puissances de i

Exprimez chacun des nombres suivant comme un élément de l'ensemble $\{-1, +1, -\mathrm{i}, +\mathrm{i}\}$:

a. i^3
b. i^4
c. i^6
d. i^9
e. i^{16}
f. i^{32}

1 - 4 Formes algébriques

Écrivez les nombres suivant sous forme algébrique :

a. $\mathrm{i}^8 + 3\mathrm{i}^7$
b. $(3+2\mathrm{i}) + (5-\mathrm{i})$
c. $(6-\mathrm{i}) + (4-3\mathrm{i})$
d. $(-2+3\mathrm{i}) + (6-4\mathrm{i})$
e. $(-2-\mathrm{i}) + (-1+7\mathrm{i})$
f. $(a+\mathrm{i}b) + (c+\mathrm{i}d)$
g. $(6-2\mathrm{i}) - 4$
h. $(a+\mathrm{i}b) - (2-3\mathrm{i})$
i. $(3+\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})$
j. $(1-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$
k. $(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$
l. $(1-4\mathrm{i})^2$
m. $(2+\mathrm{i})^3$
n. $\frac{1}{2-3\mathrm{i}}$
o. $\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$
p. $\frac{3+2\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$
q. $\frac{2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
r. $\frac{3-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
s. $\frac{1}{\mathrm{i}}$
t. $1+\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^7$
u. $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$
v. $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
w. $(-1+\mathrm{i})^4$
x. $\left(\frac{2+3\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}}\right)^4$
y. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^8$
z. $\left(\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}\right)^{12}$

1 - 5 Formes algébriques

On pose $z_1 = 3-\mathrm{i}$, $z_2 = 1+2\mathrm{i}$, $z_3 = -2\mathrm{i}$. Écrivez sous forme algébrique :

a. $3z_1$

b. $z_1 - z_3$

c. $2z_1 + z_2$

d. $2z_2 + \mathrm{i}z_3$

e. $\mathrm{i}(z_2 z_3)$

f. $\mathrm{i}z_1 + \mathrm{i}z_2$

g. $z_1 + \overline{z_2}$

h. $\mathrm{i}z_1 + \overline{z_3}$

i. $z_1\overline{z_2}$

j. $\mathrm{i}z_1^2 + \frac{z_2}{z_3}$

k. $(z_1 + \overline{z_2}^2)^2$

l. $z_3\left(z_1 + \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\right)^2$

m. $(z_1 + \overline{z_2}^2 + \frac{\mathrm{i}}{z_1+z_3})^2$

n. $z_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{\mathrm{i}z_1}$

1 - 6 Équations

Déterminez les valeurs des réels x et y ou la forme algébrique du complexe z satisfaisant les équations suivantes :

a. $x + \mathrm{i}y = (2-3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$

b. $(x+\mathrm{i}y) + 3(2-3\mathrm{i}) = 6 - 10\mathrm{i}$

c. $2x + \mathrm{i}y = 6$

d. $(x+\mathrm{i}y)(5+\mathrm{i}) = 3-2\mathrm{i}$

e. $(x+\mathrm{i}y)(2+\mathrm{i}) = (1-\mathrm{i})^2$

f. $(2-\mathrm{i})x - (1+3\mathrm{i})y - 7 = 0$

g. $x^2 + 2xy\mathrm{i} + y^2 = 10 + 6\mathrm{i}$

h. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 8 - 6\mathrm{i}$

i. $(x+\mathrm{i}y)^2 = 5 + 12\mathrm{i}$

j. $(x+\mathrm{i}y)^2 = -3 + 4\mathrm{i}$

k. $\frac{2}{z} = \frac{1}{2-\mathrm{i}} + \frac{1}{1+2\mathrm{i}}$

l. $\frac{x}{1+\mathrm{i}} + \frac{y}{1+2\mathrm{i}} = 1$

m. $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + x\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}$

1 - 7 Modules

Calculez les modules suivants :

a. $|-3+4\mathrm{i}|$

b. $|6-8\mathrm{i}|$

c. $|5+\mathrm{i}|$

d. $|-3\mathrm{i}|$

e. $\left|\sqrt{2}+\mathrm{i}\right|$

f. $\left|\sqrt{2}+1\right|$

g. $\left|\frac{1}{4+3\mathrm{i}}\right|$

h. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right|$

i. $\left|-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}\right|$

j. $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right|$

k. $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|$

1 - 8 Modules

a. *Sachant que $z_1 = -3-2\mathrm{i}$ et $z_2 = 1-3\mathrm{i}$ calculez :*
$|z_1|$; $|z_1 - z_2|$; $|z_1 + 2z_2|$; $|z_1 z_2|$

b. *Sachant que $z_1 = 5+\mathrm{i}$ et $z_2 = -2+3\mathrm{i}$, vérifiez que*

$$|z_1|^2 = 2|z_2|^2$$

c. *Soit $k \in \mathbb{R}$, $z_1 = -1+8\mathrm{i}$, $z_2 = (1-k)+7\mathrm{i}$. Déterminez les valeurs de k telles que $|z_1| = |z_2|$.*

d. *Soit $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y des réels. Montrez que :*

$$|z-2\mathrm{i}| - |z-1| \Leftrightarrow 2x - 4y + 3 = 0$$

e. *Résolvez dans $\mathbb{R}$ $|11+2\mathrm{i}| = |x+1+5\mathrm{i}|$.*

f. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ $\sqrt{5}|z| + \mathrm{i}z = 3+\mathrm{i}$.*

1 - 9 Équations de degré 2 ou 3

a. *Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :* $z^2+6z+10=0$; $z^2-2z+2=0$
$2z^2-2z+5=0$; $z^2-6z+10=0$
$z^2+1=0$; $z^2+z+1=0$
$z^2 - \mathrm{i}\sqrt{2}z - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

b. *Vérifiez que $5+\mathrm{i}$ est solution de $z^2-10z+26=0$ puis déterminez la deuxième solution.*

c. *Déterminez des équations du second degré telles que les nombres suivants en soient les solutions :*
$\pm 2\mathrm{i}$; $1\pm 2\mathrm{i}$; $3\pm 2\mathrm{i}$; $-2\pm \mathrm{i}\sqrt{5}$

d. *Si $3-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2+kz+13=0$ où k est un réel, déterminez k et trouvez l'autre solution de l'équation.*

e. *L'équation $2z^2-(7-2\mathrm{i})z+k=0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k puis la deuxième solution de l'équation.*

f. *Si $-1-2\mathrm{i}$ est une solution de $z^2+az+b=0$, déterminez les réels a et b.*

g. *L'équation $z^2+(-3+2\mathrm{i})z+k-\mathrm{i}=0$ où $k\in\mathbb{R}$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez k et la deuxième solution de l'équation.*

h. *L'équation $z^2+(p+5\mathrm{i})z+q(2-\mathrm{i})=0$ admet $1+2\mathrm{i}$ comme solution. Déterminez p et q ainsi que l'autre solution de l'équation.*

i. *L'équation $z^3-4z^2+6z-4=0$ admet $1+\mathrm{i}$ comme solution. Trouvez les deux autres solutions.*

j. *Idem avec $2z^3-9z^2+30z-13=0$ et $2+3\mathrm{i}$.*

k. *Idem avec $z^3-8z^2+22z-20=0$ et 2.*

l. *Idem avec $z^3-4z^2+6z-4=0$ et $1-\mathrm{i}$.*

m. *Idem avec $z^3-\mathrm{i}z^2-z+\mathrm{i}=0$ et i*

n. *Idem avec $z^3-4z^2+4z+k=0$ et $1-3\mathrm{i}$ en commençant par déterminer le réel k.*

o. *Idem avec $z^3+kz^2+z+34=0$ et $4-\mathrm{i}$.*

p. *Factorisez z^3-1 par $z-1$ puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-1=0$.*

q. *Factorisez $z^3+(3+\mathrm{i})z^2-4z-12-4\mathrm{i}$ par z^2-4 puis résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+(3+\mathrm{i})z^2-4z-12-4\mathrm{i}=0$.*

1 - 10 Formes trigonométriques

Déterminez les formes trigonométriques des nombres suivants :

a. $1+\mathrm{i}$

b. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$

c. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

d. $5\mathrm{i}$

e. $-4\mathrm{i}$

f. $-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$

g. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

h. $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

i. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2$

j. $\frac{2}{-1+\mathrm{i}}$

k. $\frac{-2}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$

l. $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$

m. $\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}$

1 - 11 Formes trigonométriques

Déterminez les formes algébriques des nombres suivants :

a. $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b. $5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

c. $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

d. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

e. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

f. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

g. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

h. $\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)\right)\left(5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)\right)$

i. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

j. $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

k. $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

l. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$

m. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^7$

n. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^8$

o. $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3$

p. $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^5$

q. $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$

r. $(1-\mathrm{i})^4$

s. $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$

t. $(-2-2\mathrm{i})^4$

u. $(1+\mathrm{i})^8$

v. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^6$

1 - 12 Jouons aux cubes

Développez $(a+b)^3$ puis écrivez le plus simplement possible :

a. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$

b. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$

c. $\left(\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)^3$

d. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}\right)^3$

e. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^3$

1 - 13 Lignes trigonométriques

Écrivez sous forme trigonométrique

$$z=\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2(1-\mathrm{i})}$$

puis sous forme algébrique et déduisez-en $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1 - 14 Équation dans C

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1}=1+\mathrm{i}.$$

1 - 15 Système d'équations dans C

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases}2z_1+z_2=4\\-2\mathrm{i}z_1+z_2=0\end{cases}$$

1 - 16 Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i},\qquad z_2=2-2\mathrm{i},\qquad \mathrm{A}=\frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

a. *Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.*

b. *En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.*

c. *Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de* $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

d. *Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.*

1 - 17 Racine carrée dans C

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2=3-4\mathrm{i}$$

1 - 18 Équation à coefficients dans R

a. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

b. *Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.*

1 - 19 Équation à coefficients dans C

a. *Calculer $(3-2\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*

$$z^2 + z - 1 + 3\mathrm{i} = 0.$$

b. *Calculer $(5-3\mathrm{i})^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*

$$z^2 + (5-\mathrm{i})z + 2 + 5\mathrm{i} = 0.$$

c. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation*

$$z^2 - (5+3\mathrm{i})z + 10 + 5\mathrm{i} = 0.$$

1 - 20 Ligne de niveau

a. *Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $|z-3| = 2$?*

b. *Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $\arg(z-(3-\mathrm{i})) = \pi/3$?*

c. *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que*

$$z = 1 - \mathrm{i}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}\alpha}$$

où L et C sont deux contantes réelles strictement positives et où α est un réel variant dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

ROC

1 - 21 Amérique du Sud, novembre 2006

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ ».
Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. *Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)$.*

b. *Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$*

1 - 22 Centres étrangers, juin 2007

a. *Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.*

b. *Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.*

c. *Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.*

1 - 23 Amérique du Nord, juin 2006

Prérequis : le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Démontrer que :

- *pour tous nombres complexes z_1 et z_2*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

- *pour tout nombre complexe z non nul*

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

1 - 24 Métropole 15 juin 2006

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

- *Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif*
- *Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif*

a. *Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que*
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b. *Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.*

1 - 25 Asie juin 2006

Prérequis : On sait que si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

1 - 26 Centres étrangers, juin 2006

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
i. *Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r &> 0 \end{cases}$$

ii. *Pour tous nombres réels a et b :*

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

à 2π près

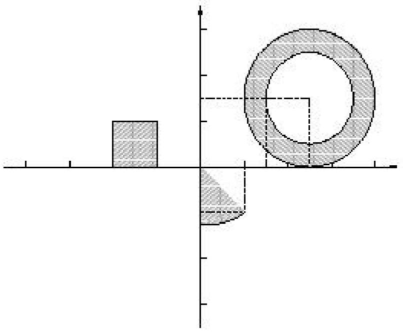
Exercices originaux

1 - 27 Problème ouvert

En utilisant les racines carrées de $1+\mathrm{i}$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
Trouvez au moins deux autres méthodes de calcul en utilisant des formules trigonométriques.

1 - 28 Du dessin aux formules

Caractérisez les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :

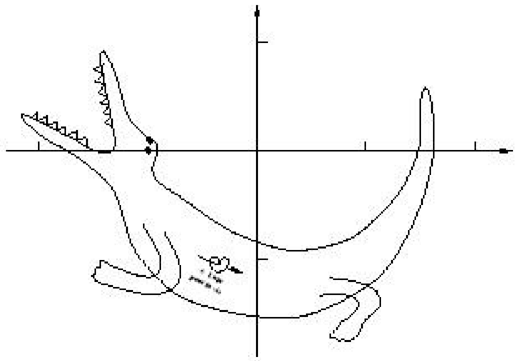


1 - 29 Le crocodile se mord la queue...

...ou comment visualiser une multiplication complexe sur une pauvre bête ?

On voudrait comprendre « quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré ». Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$



a. *Écrivez les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?*

b. *Dessinez une demi-droite issue de 0 et son image par φ.*

c. *Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placez aussi les images de quelques points particuliers du cercle.*

d. *« Dessinez l'image du crocodile ».*

e. *(plus facile) Dessinez de même l'image du croco par $z \mapsto z + 1 + 2\mathrm{i}$, $z \mapsto (\sqrt{3} + \mathrm{i})z$.*

1 - 30 Les fractales

Les fractales sont des objets irréguliers dont l'étude a débuté il y a une trentaine d'années. Elles interviennent dans de nombreux domaines : modélisation des matériaux poreux et des semi-conducteurs, description mathématique de la surface d'un nuage, étude des mécanismes financiers, infographie, c'est à dire création d'algorithmes efficaces pour représenter des objets sur un écran d'ordinateur (avec un minimum de données transmises).
Nous allons étudier deux fractales simples : le tamis et le tapis de Sierpinski.

1 - 31 Dessin du tamis de Sierpinski

Considérons les trois transformations de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\mathrm{T}_1(z) = \frac{1}{2}z \qquad \mathrm{T}_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \qquad \mathrm{T}_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Soit E_0 le triangle de sommets d'affixes 0, 1 et $1/2 + \mathrm{i}$.

a. *Dessiner E_0.*

b. *Dessiner $\mathrm{E}_1 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_0) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_0)$*

c. *Dessiner $\mathrm{E}_2 = \mathrm{T}_1(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_2(\mathrm{E}_1) \cup \mathrm{T}_3(\mathrm{E}_1)$*

$$\vdots$$

Si nous voulons transmettre ces dessins informatiquement, il est impossible de donner les coordonnées des sommets de tous les triangles noircis du tamis puisqu'il y en a une infinité. En fait, il suffit de donner E_0, T_1, T_2 et T_3 et le tour est joué. C'est ce qui est utilisé sur internet.
Un autre problème : quelle est la résistance électrique du tapis ?

1 - 32 Dessin du tapis de Sierpinski

E_0 *est le carré unité.*

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z \qquad T_2(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}$$
$$T_3(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t \qquad T_4(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t + \frac{1}{3}i$$
$$T_5(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}t + \mathrm{d}ti \qquad T_6(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} + \mathrm{d}ti$$
$$T_7(z) = \frac{1}{3}z + \mathrm{d}ti \qquad T_8(z) = \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}i$$

Complexes et électronique

1 - 33 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}(\underline{Z_2}+R)+\underline{Z_2}R},$$

avec $R = 900$, $\underline{Z_1} = 1100j$, $\underline{Z_2} = -600j$.
Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

1 - 34 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1}\cdot\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}+\underline{Z_3}},$$

avec $\underline{Z_1} = 1+2j$, $\underline{Z_2} = -1+3j$ et $\underline{Z_3} = 4+5j$.
Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

1 - 35 Fonction de transfert

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation α, définie quand α décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{T}(\alpha) = \frac{1}{1+j\alpha}.$$

a. *Montrer que pour tout nombre réel α de $[0,+\infty[$, on a :*

$$\underline{T}(\alpha) = \frac{1-j\alpha}{1+\alpha^2}.$$

b. *Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives*

$$\underline{T}(0), \quad \underline{T}(0,3), \quad \underline{T}(0,5), \quad \underline{T}(1)$$

$$\underline{T}(2), \quad \underline{T}(3).$$

c. *Montrer que, pour tout nombre réel α de $[0,+\infty[$, le point M d'affixe $\underline{T}(\alpha)$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre $[OA]$.*

d. *Quel est l'ensemble des points m d'affixe $1-j\alpha$ quand α varie dans $[0,+\infty[$?*

1 - 36 Fonction de transfert bis

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{T}$ de la pulsation α, définie quand α décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{T}(\alpha) = \frac{4}{(1+j\alpha)^3}.$$

a. *Calculer*

$$\underline{T}(0), \quad \underline{T}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \underline{T}(1), \quad \underline{T}(\sqrt{3}).$$

b. *On modifie le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{H}$ définie par :*

$$\underline{H}(\alpha) = \frac{\underline{T}(\alpha)}{1+\underline{T}(\alpha)}$$

Calculer les modules et argument de $\underline{H}(0)$, $\underline{H}(1)$ et $\underline{H}(\sqrt{3})$.

c. *Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $\underline{T}(\alpha)$.*

d. *Montrer que le module de $\underline{H}(\alpha)$ est égal à MO/MA.*

e. *Montrer qu'un argument de $\underline{H}(\alpha)$ est égal à l'angle $\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})}$.*

f. *Utiliser les questions **4.** et **5.** pour retrouver les résultats du **2.***

1 - 37 Inversion complexe

On considère l'application f du plan complexe dans $\mathbb{C}$ qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M′ d'affixe $1/z$. On pose $z = x+\mathrm{i}y$ la forme algébrique de z et $x'+\mathrm{i}y'$ celle de l'affixe z' de M′.

a. *Exprimez x' et y' en fonction de x et y.*

b. *Quelle est l'image de M′ par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y'.*

c. *Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f. Déduisez-en la nature de cette image.*

d. *Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.*

1 - 38 Étude d'un filtre

On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation α, on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$T(\alpha) = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1(\alpha)}{Z_2(\alpha)}} \quad \textit{avec}$$

$$Z_1\alpha) = R + \frac{1}{jC\alpha} \quad \textit{et} \quad Z_2(\alpha) = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\alpha}$$

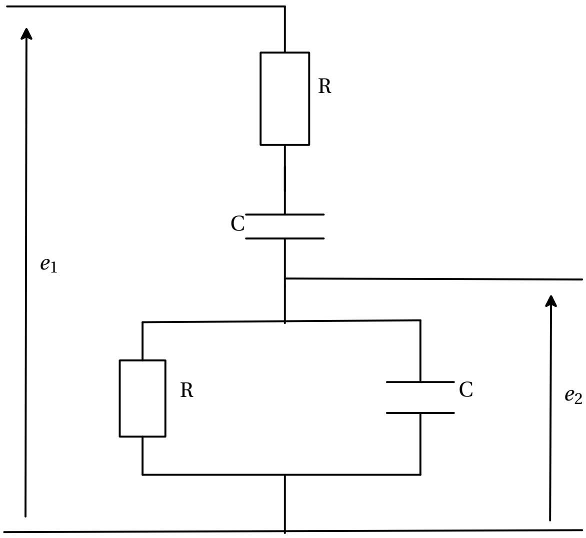


FIGURE 1.1 – Filtre

Justifiez les valeurs trouvées de Z_1 et Z_2
Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $j^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i.

a. *Montrez que* $T(\alpha) = \dfrac{1}{3 + j\left(RC\alpha - \dfrac{1}{RC\alpha}\right)}$

b. **i.** *On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par*

$$h(\alpha) = RC\alpha - \frac{1}{RC\alpha}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

ii. *On considère le point m d'affixe $3 + jh(\alpha)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque α parcourt $]0, +\infty[$?*

iii. *Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $Z = T(\alpha)$?*

iv. *Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand α parcourt $]0, +\infty[$.*

v. *Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm.*
Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + j$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

Des exercices de Bac

1 - 39 Équations - systèmes

a. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

i. $\dfrac{z+2}{z+2i} = i$

ii. $2z + i\bar{z} = 5 - i$

b. *Résoudre dans $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}$ le système suivant :*

$$\begin{cases} 2iz + z' & = 2i \\ 3z - iz' & = 1 \end{cases}$$

1 - 40 Équations coeff complexes

a. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$*

b. *Soit l'équation (F) d'inconnue complexe z :*

$$(F) : z^2 - 2z + 4 + 4i = 0$$

c. *Montrer que (F) admet pour solution un nombre imaginaire pur que l'on déterminera.*

d. *Résoudre l'équation (F).*

1 - 41 Équation de degré 4

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

a. *Déterminer deux nombres réels a et b tels que :*

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

b. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.*

c. *Placer dans un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.*

d. **i.** *Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$. Placer son image K.*

ii. *En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.*

e. **i.** *Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.*

ii. *Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.*

iii. *Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.*

1 - 42 Style Bac

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.
On note A et B les points d'affixes respectives 2i et -1.
À tout nombre complexe z, distinct de 2i, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$.

a. *Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z \neq -1$.*

b. *Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants*

i. *L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.*

ii. *L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.*

1 - 43 Le QCM de la mort

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Vous avez 1 point par bonne réponse. J'enlève 0,5 point par réponse inexacte.

a. *Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\bar{z}+|z| = 6+2\mathrm{i}$. La forme algébrique de z est*

○ $\dfrac{8}{3}-2\mathrm{i}$ ○ $-\dfrac{8}{3}-2\mathrm{i}$

○ $\dfrac{8}{3}+2\mathrm{i}$ ○ $-\dfrac{8}{3}+2\mathrm{i}$

b. *Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1| = |z+\mathrm{i}|$ est la droite d'équation :*

○ $y = x-1$ ○ $y = -x$

○ $y = -x+1$ ○ $y = x$

c. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$ est réel si, et seulement si*

○ $n \equiv 1[3]$ ○ $n \equiv 2[3]$

○ $n \equiv 0[3]$ ○ $n \equiv 0[6]$

d. *Soit l'équation $z = \dfrac{6-z}{3-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Une de ses solutions est*

○ $-2-\sqrt{2}i$ ○ $2+\sqrt{2}i$

○ $1-\mathrm{i}$ ○ $-1-\mathrm{i}$

e. *Soit A et B d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = i$ et $z_\mathrm{B} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. L'affixe z_C du point de C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \pi/3$ est*

○ $-\mathrm{i}$ ○ $2\mathrm{i}$

○ $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ ○ $\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

f. *Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est*

○ *une droite* ○ *un cercle*

○ *une lemniscate de Bernoulli*

○ *une bergère syldave*

1 - 44 Bac

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. Dans tout l'exercice, $\mathcal{P}\backslash\{O\}$ désigne le plan $\mathcal{P}$ privé du point origine O.

a. *On considère l'application f de $\mathcal{P}\backslash\{O\}$ dans $\mathcal{P}\backslash\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ définie par : $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.*

i. *Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.*
En déduire que, pour tout point M de $\mathcal{P}\backslash\{O\}$ les points M et $\mathrm{M}' = f(\mathrm{M})$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

ii. *Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}\backslash\{O\}$ tels que*
$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

iii. *M est un point du plan $\mathcal{P}$ distinct de O, U et V, on admet que M′ est aussi distinct de O, U et V.*
Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$.
En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ *et* $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$

b. **i.** *Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.*

ii. *Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.*

1 - 45 VRAI ou FAUX

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

a. *Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.*

b. *Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.*

c. *Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.*

d. *Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.*

1 - 46 Une impression de Déjà-Vu

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ à 2π près.
On note A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{iz+3}{z+i}$$

a. *Étude de quelques cas particuliers.*

i. *Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB]. Placer ces points sur le dessin.*

ii. *On note C le point d'affixe $c = -2 + i$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.*

b. *Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que*
$\arg(z') = \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) + \frac{\pi}{2}$ *à 2π près.*

c. *Étude de deux ensembles de points.*

i. *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.*

ii. *Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M′ ?*

1 - 47 Géométrie complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = \frac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

a. *Déterminer l'ensemble des points invariants par f.*

b. *Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.*

c. *Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.*

d. **i.** *Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.*

ii. *Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.*

iii. *Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P′ par f.*

e. *On considère le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathcal{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.*

1 - 48 QCM

Pour chacune des *3* questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte *1* point ; une réponse inexacte enlève *0,5* point ; l'absence de réponse est comptée *0* point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

a. *Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :*

i. $|z - 2 + 5i|^2 = 3$;

ii. $|z + 2 - 5i|^2 = 3$;

iii. $|z - 2 + 5i| = 3$.

b. *On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.*

i. *M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;*

ii. *M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;*

iii. *M est l'orthocentre du triangle ABC.*

c. *Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $5 + 4i$, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.*

i. $|z_G - 3 - 2{,}5i| = \frac{5}{6}$;

ii. $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$;

iii. $z_G - (3+2{,}5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$.

1 - 49 QCM : on aime !

Pour chacune des trois questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

a. *Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives*
$-2+3i$, $-3-i$ *et* $2,08+1,98i$. *Le triangle ABC est :*

- **(a)** : *isocèle et non rectangle*
- **(b)** : *rectangle et non isocèle*
- **(c)** : *rectangle et isocèle*
- **(d)** : *ni rectangle ni isocèle*

b. *à tout nombre complexe* $z \neq -2$, *on associe le nombre complexe* z' *défini par :* $z' = \dfrac{z-4i}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ *est :*

- **(a)** : *un cercle de rayon 1*
- **(b)** : *une droite*
- **(c)** : *une droite privée d'un point*
- **(d)** : *un cercle privé d'un point*

c. *Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.*
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' *est un réel est :*

- **(a)** : *un cercle*
- **(b)** : *une droite*
- **(c)** : *une droite privée d'un point*
- **(d)** : *un cercle privé d'un point*

1 - 50 Bac

I. Étude d'un cas particulier
On pose : $a = 3+i$, $b = -1+3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

a. *Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*

b. *Placer les points A, B, C et le point H d'affixe* $a+b+c$, *puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.*

II. Étude du cas général.
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c *sont les affixes respectives des points A, B, C.*

a. *Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :*

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

b. *On pose* $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

- **i.** *En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que* w *est imaginaire pur.*
- **ii.** *Verifier l'égalité :* $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = w$ *et justifier que :* $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$.
- **iii.** *En déduire que le nombre complexe* $\dfrac{b+c}{b-c}$ *est imaginaire pur.*

c. *Soit H le point d'affixe* $a+b+c$.

- **i.** *Exprimer en fonction de* a, b *et* c *les affixes des vecteurs* $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.
- **ii.** *Prouver que* $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *où* k *est un entier relatif quelconque.*
  (On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$*).*
- **iii.** *Que représente le point H pour le triangle ABC ?*

1 - 51 Une petite équation

On considère l'équation :

$$(E) \quad z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

où z est un nombre complexe.

a. *Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.*

b. *Déterminer les nombres réels* a, b *et* c *tels que, pour tout nombre complexe* z *on ait :*

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)\left(az^2 + bz + c\right).$$

c. *En déduire les solutions de l'équation (E).*

CHAPITRE

2

À la conquête du calcul infinitésimal

C'est la notion de dérivée qui a lancé le calcul différentiel de manière intuitive bien avant la formalisation rigoureuse de limite. Nous allons donc suivre l'évolution naturelle de l'esprit humain...

1 Recherche du maximum et du minimum

Pierre de Fermat (1601 ?-1665), conseiller au Parlement de Toulouse, s'adonnait pour son plaisir aux mathématiques et y excellait. Il est célèbre aujourd'hui auprès du grand public car un des théorèmes qu'il a énoncé a était démontré trois siècles plus tard par un mathématicien anglais, Andrew Wiles, en 1996.

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Voici un extrait des Œuvres de Fermat, traduites par Paul Tannery en 1896 :

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Fermat. — III. 16

Voici un exempl

Soit à partager la droite AC (fig. 91) en E, en sorte que AE × EC soit maximum.

Fig. 91

Fig. 91.

Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Recherche

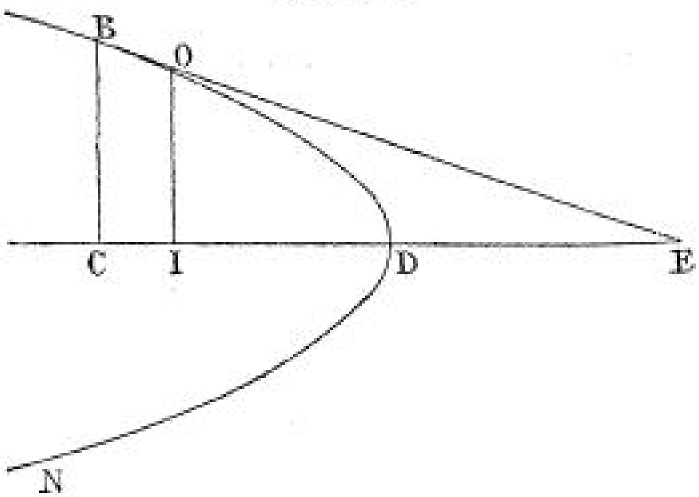
Discuter du rôle joué par e dans le premier problème lié à la figure 91. Qu'est-ce que représente l'*adégalité* pour Fermat ?

DES TANGENTES DES LIGNES COURBES.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Recherche

Reprenons maintenant le deuxième problème (celui des « tangentes des lignes courbes ») en le reformulant de manière plus moderne.
Dans un repère $\left(\mathrm{D};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{P}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Soit B un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse positive et C la projection orthogonale de B sur $\left(\mathrm{D};\vec{\jmath}\right)$.
On appelle Δ la tangente en B à $\mathcal{P}$. Elle coupe $\left(\mathrm{D};\vec{\jmath}\right)$ en E. On se propose de déterminer analytiquement Δ et, pour cela, de calculer la distance CE.

1. Faire une figure. La comparer avec la figure 92 du texte. Soit O un point de [BE] d'ordonnée positive et I la projection orthogonale de O sur $\left(\mathrm{D};\vec{\jmath}\right)$. La droite (OI) coupe P en O′.

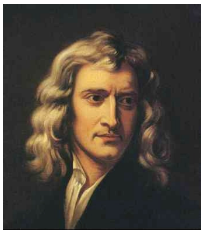
   Comme CD est connu (c'est l'abscisse de B), on pose $\mathrm{CD} = d$ et $\mathrm{DI} = d - e$. On cherche $\mathrm{CE} = a$. Pour trouver a, on fera varier e.

   Que représente e sur la figure ?

   Si $\mathrm{O} \in [\mathrm{BE}]$ est tel que $\mathrm{B} \in [\mathrm{OE}]$, quel doit être le signe de e si $\mathrm{DE} = d - e$? Que représente alors e ?
2. Comparer $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}}$ et $\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{OI}^2}$, puis $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DI}}$ et $\frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{IE}^2}$.
3. Exprimer IE en fonction de a et e. Déduire de ce qui précède une inégalité où interviennent a, d et e.
4. Après simplification, mettre l'inégalité sous la forme $\lambda e^2 > \mu e$. Donner une relation entre a et d impliquant que l'inégalité est vraie pour tout e, quel que soit son signe.
5. Écrire une équation de Δ en fonction de d.
6. Sur une autre feuille, dans un nouveau repère orthonormé, construisez une dizaine de droites à l'aide de l'équation trouvée à la question précédente, en prenant diverses valeurs pour d. Qu'observe-t-on ?

2 Newton, Leibniz et Bernoulli

Isaac Newton(1642-1727) tente de régler le problème de l'adégalité par le théorème suivant, paru dans *Les principes mathématiques de la philosophie naturelle* :



LEMME PREMIER :

Les quantités et les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin égales, et que leur dernière différence soit D, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près

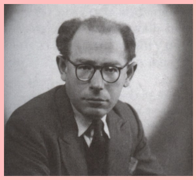
> de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothèse.

Cette idée n'est pas très rigoureuse mais a été bien suffisante pour permettre à Newton, Leibniz, Jean Bernoulli, le Marquis de L'Hospital, Mac Laurin, d'Alembert, Lagrange, Cauchy, de développer le calcul infinitésimal bien au-delà de ce que nous en verrons cette année, avant que Bolzano et Weierstrass ne perfectionnent la notion de limite deux siècles plus tard.
C'est celle que nous adopterons provisoirement avant d'étudier plus formellement les limites.

Remarque

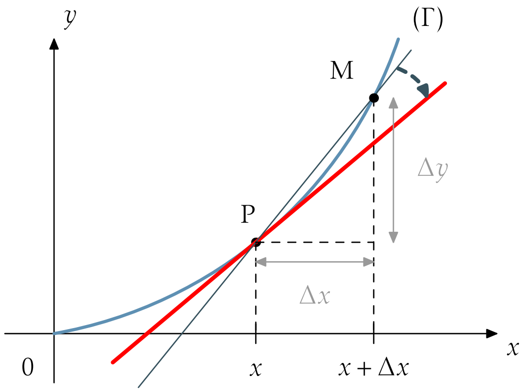
Analyse non standard et hyperréels

Il est à noter que dans les années 1960, un logicien américain d'origine allemande (encore un !...), Abraham Robinson, mit au point l'*analyse non standard* en utilisant les *nombres hyperréels*.



Il s'agit de nos réels auxquels on adjoint des nombres *infinitésimaux* qui sont strictement inférieurs en valeur absolue à tout nombre réel non nul, et les nombres *infiniment grands* dont les inverses sont infinitésimaux. Ceci est fait de manière très rigoureuse et permet de justifier l'incroyable intuition de l'adégalité que Fermat avait présenté trois siècles plus tôt.

En 1684, Leibniz présente presque en même temps que Newton (1671) et que le Suisse Jean Bernoulli(1691), un travail similaire en introduisant les notations $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ qui seront adoptées plus tard en 1755 par Euler puis par tous.
Pour Jean Bernoulli, **les infiniment petits sont des quantités qui peuvent être ajoutées à des quantités finies sans changer leurs valeurs. Les courbes sont des polygones à côtés infiniment courts.** Pour celui qui initia les grands mathématiciens que furent ses fils et ses neveux, le Marquis de L'Hospital et Euler, les explications trop abondantes au sujet de l'infiniment petit pourraient troubler l'entendement de ceux qui ne sont pas accoutumés à de longues explications !...
Voyons ce que cela donne pour les tangentes à la courbe d'équation $y = x^2$:



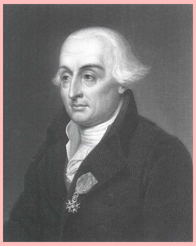
Si x augmente de Δx, alors y devient $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Or $y = x^2$. Pour des valeurs de Δx non nulles, cela donne donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

C'est ici qu'on a besoin de la notion intuitive d'infiniment petits...

Remarque

C'est Joseph-Louis Lagrange(1736-1813) ou plutôt Giuseppe Lodovico Lagrangia, un mathématicien Piémontais d'origine française, qui introduisit les termes et les notations que nous utilisons actuellement :



> Nous appellerons la fonction f_x, *fonction primitive*, par rapport aux fonctions f'_x, f''_x, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là.

3 Règles de dérivation

3 1 Dérivée d'une combinaison linéaire

Soit $y(x) = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$ avec a et b des constantes réelles.
En posant comme précédemment $y + \Delta(y) = y(x+\Delta x)$ puis $u + \Delta(u) = u(x+\Delta x)$ et $v + \Delta(v) = v(x+\Delta x)$, nous obtenons $\Delta y = a \cdot \Delta u + b \cdot \Delta v$.
Nous obtenons donc :

Propriété 2 - 1

Dérivation d'une combinaison linéaire

$$y = au + bv \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + b \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \text{ ou bien } y' = a \cdot u' + b \cdot v'$$

3 2 Dérivée d'un produit

Recherche

Essayez de prouver de même une règle de dérivation d'un produit $y = u \cdot v$.

Propriété 2 - 2

Dérivation d'un produit

$$y = u \cdot v \Longrightarrow$$

3 3 Dérivée d'un quotient

Nous allons d'abord établir un résultat préliminaire. Pour x « petit » on « sent » que $\frac{1}{1-x} \approx 1$.
Par exemple $\frac{1}{1-10^{-5}} \approx 1{,}0000100001 = 1 + 10^{-5} + 10^{-10}$.
Essayons d'être plus précis sur l'approximation. Posons

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \delta$$

et essayons de déterminer ce δ sachant qu'on peut le négliger devant x.
Multiplions chaque membre de l'équation par $1 - x$. On obtient :

$$1 - 1 - x + \delta(1-x)$$

c'est-à-dire, après simplifications :

$$\delta = x + \delta x$$

Ainsi, comme δ est négligeable devant x, on peut considérer que $\delta \approx x$ donc :

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

Remarque

Série géométrique

En 1593, François Viète établit avec une méthode similaire que, pour tout réel x tel que $|x| < 1$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Recherche

Vous pouvez maintenant essayer d'établir une formule donnant la dérivée d'un quotient $y = \frac{u}{v}$.

Propriété 2 - 3

Dérivation d'un quotient

$$y = \frac{u}{v} \Longrightarrow$$

3 4 Fonctions composées

Soit trois fonctions f, g et h telles que $h = f \circ g$. Ainsi, $h(x) = f\big(g(x)\big)$.
Posons $g(x + \Delta x) = z + \Delta z$ et $h(x + \Delta x) = y + \Delta y$.
Alors $y + \Delta y = f\big(g(x + \Delta x)\big) = f(z + \delta z)$. Or $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$. On obtient donc :

Propriété 2 - 4

Dérivation de fonctions composées

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \text{ ou } h'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Par exemple, si $h(x) = (3x-5)^2$, alors $y = h(x) = f\big(g(x)\big)$ avec $z = g(x) = 3x - 5$ et $f(z) = z^2$. On en déduit que $h'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2z \cdot 3 = 6(3x-5)$.

4 Tableau récapitulatif des dérivées

$f(x) =$	$f'(x) =$	**intervalle de validité**
$a \in \mathbb{R}$		
x^n pour $n \in \mathbb{N}$		
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$		
$\sqrt{x}$		
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Q}$		
$\cos x$		
$\sin x$		
$\tan x$		
$u + v$		
$\lambda u,\quad \lambda \in \mathbb{R}$		
uv		
$\frac{u}{v}$		
$u \circ v$		
u^k		
$\frac{1}{u}$		
$cos(u)$		

EXERCICES

Exercices Stakhanovistes

2 - 1 Calcul de formules

Déterminez, comme cela a été fait dans le cours, les dérivées de $\frac{1}{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$.

2 - 2 Calcul de dérivées

Calculez les dérivées de :

1. $(x^2+x)^3$
2. $(3x^2+4x-6)^4$
3. $(3x^2+4x-6)^{-4}$
4. $\frac{1}{(3x^2-5x^2+1)}$
5. $\cos(\sqrt{x})$
6. $\sqrt{\cos(x)}$
7. $\left(\cos(x^2+5x+1)\right)^2$
8. $\cos\left((x^2+5x+1)^2\right)$
9. $\frac{1}{\cos\left((x^2+5x+1)^2\right)}$
10. $\tan(x)$
11. $\tan\left(\sqrt{x}\right)$
12. $\sqrt{x+\sqrt{x^2+2x+1}}$
13. $(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)$
14. $\frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$
15. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

2 - 3 Tangentes

1. *Trouvez les points de la courbe d'équation* $y=x^3-2x+2$ *en lesquels la tangente est parallèle à la première bissectrice.*
2. *Trouvez une équation de la tangente à la courbe d'équation* $y=x^2-5x+6$ *parallèle à la droite d'équation* $3x+y-2=0$.
3. *En quel point de la courbe d'équation* $y=-2x^2+5x-3$ *la tangente est parallèle à la corde qui relie les points d'abscisses* 1 *et* 5 *?*
4. *Trouvez l'aire du triangle déterminé par les axes de coordonnées et la tangente à la courbe d'équation* $y=\frac{1}{x}$ *au point d'abscisse 1.*
5. *Déterminez les valeurs du paramètre* k *pour que les tangentes à la courbe d'équation*

$$y=kx^3-kx^2+7x-18$$

au points d'abscisses 1 *et* 2 *soient parallèles.*

Exercices originaux

2 - 4 Bac irlandais

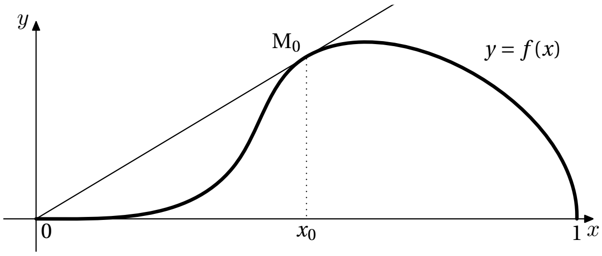
1. *If* $y=x-1+\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$, *find the value of* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *at the point* $(4;2)$.
2. *The slope of the curve* $y=a\sqrt{x}-5$ *at the point* $(4;b)$ *is* 2*. Find the values of* a *and* b.
3. *If* $y=\sqrt{x}$, *show that* $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{4}y=0$.

2 - 5 La Baleine

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. *On suppose que :*

- f *est dérivable sur* $[0,1]$;
- $f(0)=f(1)=0$;
- $f'(0)=0$.

On veut montrer que l'une des tangentes au graphe de f, *autre que la tangente à l'origine, passe par l'origine.*



Vous « voyez sur le dessin » que la pente de la droite (OM_0) *est maximale. Cela nous incite à introduire une fonction « pente »* $g:x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ *dont la dérivée est intéressante.*

2 - 6 Lois de Snell-Descartes unifiées

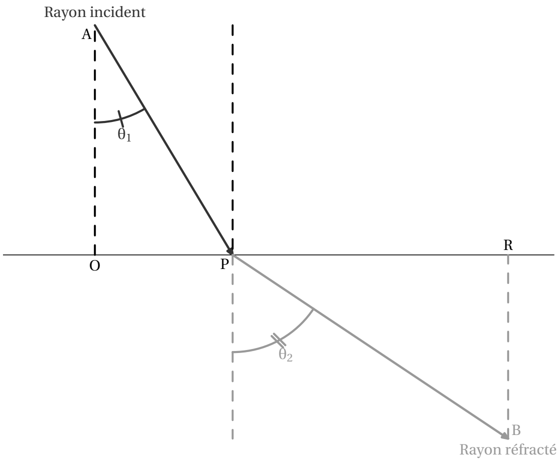
Nous allons unifier les lois de la réflexion et celles de la réfraction en un simple principe : la lumière suit le chemin le rapide.

1. *Vous connaissez la loi de le réflexion dans un milieu homogène. Notez D le point de départ du rayon qui touche le miroir en R et est réfléchi en A.*

   En considérant le point D', symétrique de D par rapport au miroir, retrouvez la célèbre relation entre l'angle d'incidence et l'angle réfléchi.

2. *Considérons à présent deux milieux homogènes séparés par un plan. Soit* v_1 *la vitesse de la lumière dans le milieu initial et* v_2 *la vitesse de la lumière dans le milieu final. Nous allons utiliser*

notre principe unifié pour déterminer une relation entre angle et vitesse.



On note $x = \mathrm{OP}$ l'abscisse de P. On note $\ell = \mathrm{OR}$, $h_1 = \mathrm{OA}$, $h_2 = \mathrm{RB}$. On calcule le temps de parcours $\mathrm{T}(x)$ entre A et B. Ce temps vaut :

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\mathrm{AP}}{v_1} + \frac{\mathrm{PB}}{v_2}$$

En calculant la dérivée de $\mathrm{T}(x)$, retrouvez la fameuse loi de la réfraction en utilisant le principe unifié.

2 - 7 Taylor et les approximations polynomiales

Conventions

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Nous dirons qu'une fonction est deux fois dérivable sur I si sa dérivée est elle-même dérivable sur I.
Nous noterons $f^{(1)}$ la dérivée d'une fonction f dérivable sur I, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$ et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.
Par convention, $f^{(0)}$ désignera f.
Nous dirons qu'une fonction est n fois dérivable sur I si sa dérivée $n-1$-ème est elle-même dérivable sur I.

Soit n un entier naturel. On désigne par $n!$ le nombre :

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n$$

Par exemple, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.
Par convention, $0! = 1$.

Soit f une fonction n fois dérivable sur I. Soit a un élément de I. Pour tout réel x, on définira le polynôme de Taylor *en a à l'ordre n par la relation :*

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{n,a}(f)(x) &= \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 \\ &\quad + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

Cas de l'ordre 1

Soit f une fonction dérivable sur I.
Simplifiez l'écriture de $\mathrm{T}_{1,a}(f)(x)$. Ça vous dit quelque chose ?
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{1,-\frac{1}{2}}(f)$ avec $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Cas des fonctions polynomiales

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{P}(x) = 7x^4 - 3x^2 + 5x - 12$.
Calculez $\mathrm{P}(2)$.
Donnez le développement de Taylor *en 2 à l'ordre 3 de P puis à l'ordre 57.*

Cas des fonctions homographiques

Une fonction homographique est une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels.
Notons g la fonction homographique correspondant au cas $a = 0$, $b = d = 1$ et $c = -1$.
Quel est l'ensemble de définition de g ?
Calculez $g^{(1)}(x)$, $g^{(2)}(x)$, $g^{(3)}(x$ et plus généralement $g^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(g)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de g et de $\mathrm{T}_{5,0}(g)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Soit $h(x) = \dfrac{5-3x}{1-x}$. Montrez qu'il existe deux réels α et β tels que $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{1-x}$.
Déduisez-en $\mathrm{T}_{5,0}(h)(x)$ pour x appartenant à un bon intervalle.

Cas des fonctions trigonométriques

Soit $f(x) = \sin(x)$.
Calculez $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x$, $f^{(4)}(x$ et plus généralement $f^{(n)}(x)$.
Écrivez le plus simplement possible $\mathrm{T}_{5,0}(f)(x)$.
Sur un même graphique, donnez l'allure des courbes représentatives de f et de $\mathrm{T}_{5,0}(f)$ en vous aidant de la calculatrice ou d'un ordinateur.

Faites de même avec $g(x) = \cos(x)$.

On pose $h(x) = \tan(x)$. Déterminez $\mathrm{T}_{4,0}(h)(x)$.

Cas des fonctions irrationnelles

On pose $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$
Répondez aux questions habituelles.

Approximation locale ou globale ?

En utilisant les termes « global » et « local », comment classeriez-vous les fonctions étudiées précédemment et leurs approximations polynomiales ?

CHAPITRE

3

Limites et continuité

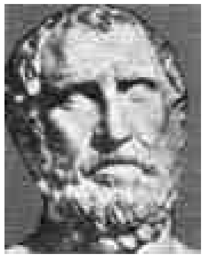
Où nous découvrons Mathémator et son disciple qui vont nous emmener vers l'infini et au-delà

1 Vers l'infini et au-delà : un brin de philosophie

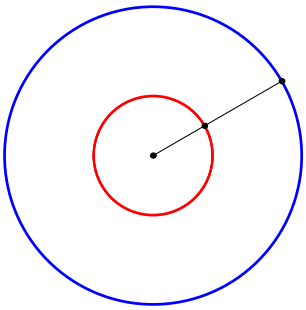
1 1 Prenons le temps d'y penser

La notion d'infini a turlupiné les plus grands esprits pendant des siècles. De rudes batailles philosophico-mathématiques ont été menées de l'Antiquité à nos jours.
Même si la conception de limite est encore en évolution, celle que vous avez découverte en classe de Première a vu le jour en 1850 grâce au charmant WEIERSTRASS et avait échappé à GALILÉE, DESCARTES, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, etc. bref : du beau monde...et on vous demande d'assimiler cette notion en quelques semaines !
L'humanité ayant pris son temps pour l'acquérir, n'hésitez pas vous non plus à réfléchir calmement à ce à quoi peut ressembler un « infiniment grand » et un « infiniment petit ».
Cela vous permettra peut-être d'éviter d'écrire, comme tant d'autres lycéens, de grosses bêtises sur vos copies au moment de calculer des limites.

1 2 De l'Antiquité au Moyen-Âge



Nous sommes coincés entre deux notions : celle d'infiniment grand et celle d'infiniment petit. C'est la deuxième qui a commencé par poser le plus de problèmes. Au V^{e} siécle avant JC, Zénon proposa quatre paradoxes, dont le plus célèbre est celui d'Achille et de la Tortue. Achille coure beaucoup plus vite que la tortue mais part 10 mètres derrière elle. Le temps qu'Achille franchisse ces 10 mètres, la tortue aura parcourue une certaine distance d, le temps qu'Achille franchisse cette distance d, la tortue aura parcouru une certaine distance d', etc., donc Achille mettra un temps infini à franchir ces distances de plus en plus petites mais en nombre infini !
Archimède et avant lui Démocrite réussirent à calculer les volumes de solides en « empilant » des « lamelles » planes d'épaisseurs infiniment petites. C'est ainsi qu'Archimède montra que le volume de la sphère valait $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Concernant les rapports entre les infinis, les questions se posèrent dès le Moyen-Âge où la figure suivante permit d'affirmer qu'il y avait autant de points sur le petit cercle que sur le grand [a].

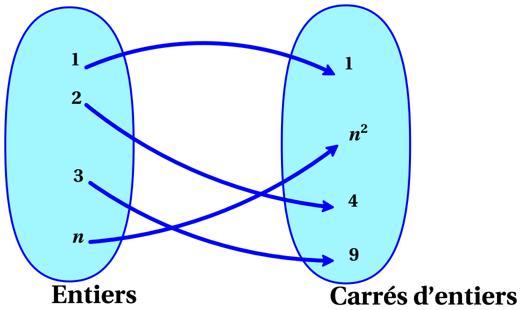


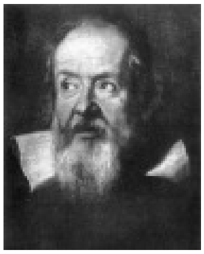
a. Les démonstrations géométriques ont longtemps été les seules démonstrations admises en mathématiques depuis les Grecs.

Ainsi, deux infiniment grands différents semblent en fait avoir le même nombre - infini- d'éléments...

1 3 Du XVI^e au XVII^e siècle

Entre deux découvertes, Galilée remarqua qu'à chaque entier naturel, on pouvait associer son carré et réciproquement qu'à chaque carré on pouvait faire correspondre sa racine carrée.





Il y avait donc autant d'entiers naturels que de carrés parfaits, ce qui en laissa plus d'un rêveur... Le grand Leibniz lui-même refusa de *croire* que des infinis qui paraissaient de toute évidence de tailles différentes soient en fait de même taille.

Mais la plus grande des batailles se joua au sujet des infiniment petits, que Cavalieri(1598 - 1647) nomma pour la première fois *indivisibles*.
Pascal en fit de larges commentaires. Il remarqua en effet que tout esprit admet facilement qu'une quantité puisse être augmentée à l'infini en la doublant et en réitérant le mécanisme par exemple.
En revanche il est *psychologiquement* beaucoup plus ardu d'imaginer un « infini de petitesse ».
Prenons un segment de droite et divisons-le en 2, puis encore en 2, etc. Si on admet une fin de la division nous dit Pascal, on admet l'existance d'indivisibles. Si ces indivisibles ont une étendue, il sont encore divisibles, ce qui est absurde. Mais s'ils n'ont pas d'étendue, on ne peut pas les « recoller » pour reformer la division dont ils sont issus...
Donc, Pascal arrive *indirectement* à la conclusion qu'on ne peut pas arrêter la division et qu'elle peut se répéter infiniment.
La difficulté d'appréhension vient du fait qu'on n'accède pas directement à la preuve de l'existence d'infiniment petits, mais indirectement en prouvant qu'il est impossible qu'ils n'existent pas !...
Reste à déterminer la nature de cet infiniment petit. D'une part on le considère comme négligeable devant des grandeurs *mesurables*, tout comme le point est négligeable devant la droite.
Mais il ne faut pas trop le négliger sous peine de ne pouvoir reconstituer en l'additionnant une quantité mesurable comme l'ont théorisé Leibniz et Newton avec le calcul différentiel comme nous le verrons en étudiant les dérivées et les intégrales.
Ils ont en effet eu besoin d'addditionner des infiniment petits, mais ont remarqué des résultats troublants.
Par exemple, Euler(1707 - 1783) a montré que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

mais que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \longrightarrow +\infty$$

même si dans chacun des cas on ajoute des infiniment petits.
De plus, on peut se demander que vaut

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

D'une part, $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, et d'autre part $1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$, et donc...$0=1$!
Bref, y a quelque chose qui cloche là-dedans, ce qui fit dire à l'Irlandais Berkeley *ne vaut-il pas mieux donner de bonnes approximations que prétendre atteindre à l'exactitude par des sophismes ?* et donc étudier des polygones plutôt que des courbes par exemple. Sauf qu'il faudrait alors réfuter le calcul différentiel et renoncer quasiment à tout ce qui s'est découvert en sciences depuis le XVII^e siècle !

1 4 Le XIX^e siècle...enfin !

Gauss(1777 - 1855), l'un des plus grands génies de l'Histoire n'a pas encore une vision correcte de l'infini, mais résume en fait la vision générale des limites que vous devez acquérir au Lycée : *L'infini ne doit être qu'une façon de parler pour exprimer que certaines quantités peuvent s'approcher aussi près que l'on veut d'une limite ou augmenter au delà de toute limite.*

Le grand bond de la pensée vient d'être effectué : cet infiniment petit qu'on recherchait avec tant d'ardeur depuis des siècles, cet ultime stade hypothétique, on le cherchait au mauvais endroit : on le cherchait constant alors qu'il faut le considérer comme *variable* : c'est ce que traduit le *aussi petit que l'on veut* dont parle Gauss et que va reprendre Cauchy dans ses *Leçons sur le calcul infinitésimal* qui marque le réel envol de l'Analyse moderne.
Notre austère royaliste posa en effet *Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*
C'est la définition utilisée en Terminale. Il existe cependant une faille dans cette définition mais qui est sans importance à notre niveau.
Il faudra attendre 1861 et Weierstraß pour obtenir une définition rigoureuse et surtout Cantor pour explorer les réels et l'infini (voir aussi ?? page ??).

Cantor mit au point la *Théorie des Ensembles* et prouva ainsi des résultats qui défient la perception que l'on a du monde réel.
Il donna un nom au *cardinal* (c'est-à-dire au nombre d'éléments) de $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ (qui se lit aleph zéro). Il montra qu'il s'agit du plus petit cardinal d'un ensemble infini. Comme l'avait déjà pressenti Galilée, il montra qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers tout court, et donc que $2\aleph_0=\aleph_0$.
Il montra ensuite qu'il y avait autant de nombres rationnels que d'entiers. Or un entier peut être représenté par un couple (numérateur,dénominateur). Il y a donc

$\aleph_0\aleph_0$ tels nombres et donc $\aleph_0^2 = \aleph_0$... On parle alors d'ensembles *dénombrables*, c'est-à-dire d'ensembles dont tous les éléments peuvent être reliés d'une et une seule manière à un entier naturel [b]
Est-ce pareil pour $\mathbb{R}$? Cantor montra en fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : on ne peut pas mettre un dossard sur chacun des nombre réels. Plus fort encore : il montra qu'il y a autant de nombres dans $[0\,;1]$ que dans $\mathbb{R}$ tout entier. Et le summum : il y a autant de nombres dans $[0\,;1]$ que dans l'Espace de dimension 3 tout entier !
Ce résultat rendit à moitié fou le pauvre russo-germano-danois qui affirma en parlant de ces résultats : « je le vois mais je n'y crois pas »...
Lorsqu'on vous a présenté les réels en 2$^{\text{nde}}$, on vous a parlé des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des irrationnels. On a cependant besoin de parler d'une autre catégorie de nombres : *les nombres algébriques* qui sont les réels solutions d'une équation polynomiale à coefficients rationnels...
Par exemple, $\sqrt{2}$ est algébrique car il est solution de $x^2 - 2 = 0$. De même, $\frac{3}{2}$ est algébrique car solution de $2x - 3 = 0$.
Les nombres qui ne sont pas algébriques sont dits *transcendants*.
Cantor montra que l'ensemble des nombres algébriques est aussi dénombrable, et donc que les nombres transcendants ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire qu'il y en a beaucoup plus...or vous ne connaissez qu'un seul de ces nombres : π ! Et on en connaît en fait très peu : il a fallu de grosses recherches à la fin du XIXe pour prouver que π était transcendant. C'est assez troublant de penser qu'on ne connaît pas la plupart des nombres réels !...

1 5 Oui...et alors ?

Votre cerveau fume ?...Bien ! Que retenir de ce passionnant exposé ? Et bien au moins que *calcul sur les limites = danger*. Les infiniment grands et les infiniment petits doivent se traiter avec la plus grande prudence et qu'il a fallu des siècles à l'humanité pour les apprivoiser. Quant à vous, je vous laisse deux semaines...
Il est maintenant temps de s'amuser un peu.

2 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Mathémator : Question idiote n'est-ce pas ?
Téhessin [c] : Ben c'est une formule comme par exemple $f(x) = (x+1)^2$

Mathémator : C'est tout ? Je vois...L'année de formation qui nous attend ne sera pas superflue. Si vous avez éprouvé des difficultés l'an passé, c'est peut-être que vous n'avez pas fait l'effort d'avoir en tête une définition claire, précise, rigoureuse. Peut-être n'avez-vous pas compris comment cette définition pouvait être liée aux diverses propriétés, à quoi tout le tralala pouvait servir, comment cette partie du programme pouvait être reliée à d'autres notions déjà étudiées. Vous ne semblez pas avoir une vision intuitive de la notion susceptible de vous aider à comprendre comment tout s'imbrique si merveilleusement dans notre magnifique univers mathématique à l'esthétique si parfaite. Pourquoi cette notion est-elle apparue ? Quelle est sa place dans l'histoire de l'esprit humain ? Quelles sont ses applications concrètes ? C'est avec ces questions en tête que nous essaierons d'aborder toutes les notions qu'un(e) jeune Mataïe se doit de maîtriser à l'issue de sa formation terminale.

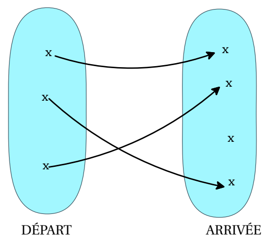
b. en gros, on peut accoler un dossard différent à tous...
c. Si notre héros est un garçon, c'est pour faciliter les accords des adjectifs et participe passé.

Téhessin (à part) : *À ce rythme là, dans deux ans on y est encore, et moi j'ai d'autres projets.*

Mathémator : Vous dîtes ?

Téhessin : J'ai hâte d'étancher ma soif de connaissance, ô céleste maître.

Mathémator : À la bonne heure ! Disons qu'une fonction associe à TOUT élément d'un ensemble de départ un UNIQUE élément d'un ensemble d'arrivée. Cela correspond typiquement au diagramme en patates suivant



Nous nous restreindrons aux fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.

Téhessin : Parce qu'il en existe d'autres ?

Mathémator : Nous verrons cette année quelques exemples de fonctions à valeurs complexes, de fonctions vectorielles, de fonctions de plusieurs variables, sans toutefois rentrer dans le détail, mais sachez au moins qu'elles existent. D'ailleurs, vous en avez étudiées en primaire. Votre instituteur vous a sûrement parlé de celle-ci :

$$: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (L,\ell) & \mapsto & 2(L+\ell) \end{array}$$

Téhessin (à part) : *Il est complètement fou...Il y a 5 TS au lycée et faut que je tombe sur la pire* **tout haut :** j'ai peut-être un trou de mémoire mais je doute que ma maîtresse de CM1 m'ait jamais parlé de cette...chose.

Mathémator : bahh, elle vous a sûrement dit que le périmètre d'un rectangle était égal au double de la somme de sa longueur et de sa largeur...c'est pareil.

Téhessin : Donc ce que j'ai appelé *fonction* depuis le collège n'est qu'un cas particulier de fonction.

Mathémator : Oui mais, jusqu'à nouvel ordre, par abus de langage, *fonction* sous-entendra pour nous *fonction d'une variable réelle à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Il reste un problème à résoudre pour notre confort intellectuel : nous travaillons avec des nombres réels, mais qu'est-ce que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ?

Téhessin : Ben c'est tous les nombres qui existent.

Mathémator : C'est faux et beaucoup trop vague ! Faux car vous avez rencontré en ce début d'année de nouveaux nombres qui ne sont pas des réels (les complexes) et vague car cela ne nous permet pas d'avoir des propriétés sur $\mathbb{R}$ exploitables.
Malheureusement, la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ est hors de notre portée pour le moment.

3 Pourquoi est-il important de préciser sur quel ensemble on travaille ?

Mathémator : Posez votre stylo sur votre table et observez-le : il a l'air solide et immobile. Maintenant, imaginez que vous observez ce même stylo, mais avec une loupe assez puissante pour voir ce qui s'y passe au niveau atomique : votre stylo vous apparait alors plein de vide, avec des électrons qui tournent dans tous les sens. C'est pourtant le même stylo. Mais une propriété locale - un atome est pratiquement vide de matière - n'est pas « exportable » au niveau global - le stylo nous apparaît solide, sans la moindre trace de vide.
Pour l'étude d'une fonction, il faudra prendre le même type de précautions, à savoir distinguer un problème local d'un problème global.

Téhessin : Je comprends votre exemple physique, mais je ne vois pas bien ce que ça peut donner en mathématique.

Mathémator : Il faut commencer par acquérir une bonne vision de cet ensemble $\mathbb{R}$, à la fois connu et mystérieux. Pour cela fermez les yeux.

Téhessin (à part) : *C'est le gourou d'une secte ou un prof de maths ? ! Je vais quand même garder un œil ouvert au cas où.*

Mathémator : Vous voyez la droite des réels ?

Téhessin (à part) : *Avec des éléphants roses courant dessus* **tout haut :** je ne vois qu'elle.

Mathémator : Bien, alors repérez le nombre 32 et zoomez dessus, disons en vous plaçant dans l'intervalle $[31{,}33]$. Puis rezoomez, cette fois-ci en vous plaçant dans l'intervalle $[31{,}9\,;\,32{,}1]$: vous êtes plus proche de 32. Mettez-vous maintenant dans la peau de $32-10^{-32}$.

Téhessin (à part) : *Ça devient grave, il a peut-être besoin d'une piqure...*

Mathémator : Pour lui, 31,9 est à l'autre bout du monde et il se sent très proche de 32. Mettez-vous alors à la place de $32-10^{-10^{10^{10}}}$: vous vous sentez voisin de 32 et pour vous $32-10^{-32}$ est sur une autre planète.

Téhessin : Je commence à voir, les yeux fermés, où vous voulez en venir : on aura beau chercher, on ne trouvera pas de nombre réel plus proche de 32 que tous les autres.

Mathémator : La notion de « proximité » devient alors toute relative. Il faudra garder ces schémas en tête quand nous travaillerons dans $\mathbb{R}$.

Revenons à présent à notre distingo local - global. Nous serons souvent amenés à parler d'une assertion vraie ou fausse « au voisinage » d'un point. Par exemple, pensez-vous que $x^2 \leqslant 1$ au voisinage de 0 ?

Téhessin : En fait, c'est faux pour $x = 2$, par exemple, mais ça devient vrai si x est compris entre -1 et 1, donc « localement », autour de 0, c'est vrai.

Mathémator : On peut dire en fait que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0-1, 0+1[$, l'assertion est vraie. Nous verrons que ce résultat nous permettra de dire que l'assertion est vraie au voisinage de 0.

Maintenant, pensez-vous que $\frac{1}{x^2} \geqslant 16$ au voisinage de 0 ?

Téhessin : Je vous arrête tout de suite : l'assertion est fausse car elle n'est même pas vraie en 0 puisque $1/x^2$ n'est pas défini en 0.

Mathémator : Cela aurait pu être un argument mais cela se serait avéré très réducteur car nous serons amenés à étudier des propriétés au voisinage de points où la fonction n'est pas définie, notamment au moment de l'étude des limites. Ici, nous pouvons dire que l'assertion est vraie pour tout x appartenant à $]0-4, 0+4[$ ET à l'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.
On peut utiliser le symbole $\cap$ de l'intersection pour noter l'ensemble $]0-4, 0+4[\cap\mathbb{R}^*$, ce qui peut encore s'écrire sous la forme $]-4, 0[\cup]0, 4[$. Ainsi, n'oubliez pas de considérer l'intersection de l'intervalle englobant le point avec **l'ensemble de définition**.

Encore un petit exemple : croyez-vous que x^3 soit positif au voisinage de 0 ?

Téhessin : En fait, x et x^3 ont le même signe donc il suffit de dire que pour $x = -10^{-32}$ par exemple, l'assertion est fausse.

Mathémator : Mouais, le problème c'est qu'un contre-exemple ne suffit pas : qui nous dit que x^3 ne devient pas positif pour des valeurs de x plus petite ? Il faut donc donner une démonstration et pas seulement un cas particulier. Ce sera l'occasion de découvrir un *raisonnement par l'absurde* qui nous rendra service tout au long de l'année.

Supposons donc que l'assertion soit vraie *(on suppose ce qui nous semble absurde...)*
Cela est équivalent à dire qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que x^3 soit positif pour tout $x \in]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[$
Ainsi, par exemple, $(-\varepsilon)^3$ est positif or $(-\varepsilon)^3 < 0$ car $-\varepsilon < 0$: on arrive donc à une *contradiction*.
Il y a donc quelque chose qui cloche dans notre raisonnement et ça ne peut être que le point de départ car nous sommes sûrs du reste, donc l'assertion est fausse.

Retenez donc bien qu'il faut que le point critique appartienne à l'intervalle.
Nous pouvons donc proposer l'assertion suivante :

Définition 3 - 1

voisinage d'un réel
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et x_0 un réel. Une assertion est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que l'assertion soit vraie pour tout x de $\mathrm{I}\cap\mathcal{D}$

Nous serons également amenés à étudier des assertions au voisinage de l'infini.

Téhessin : Ça me parait un peu difficile à atteindre.

Mathémator : Mais ce n'est pas impossible : nous allons un peu modifier notre définition. Par exemple, est-ce que la fonction inverse

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est majorée sur son ensemble de définition ?

Téhessin : Je sens que c'est faux au voisinage de 0.

Mathémator : Je vous laisse le montrer. Modifions alors le problème : vous êtes d'accord que $f(x) \leqslant 1$ dès que $x \in [1, +\infty[$. On dira alors que f est majorée par 1 au voisinage de $+\infty$: on ne peut pas mettre l'infini dans notre intervalle, certes, mais on peut le placer à l'une de ses extrémités.

Définition 3 - 2

voisinage de l'infini
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Une assertion est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'assertion soit vraie pour tous les x de $]a, +\infty[$

Téhessin : Toutes ces propriétés me semblent pourtant plus globales que locales : elles sont vraies sur de grands intervalles.

Mathémator : Je comprends ce que vous voulez dire : en fait, une propriété est locale dès qu'elle n'est pas vraie *partout*. Il y a ensuite des propriétés plus locales que d'autres, je vous l'accorde. Pour vous en rendre compte, nous allons (re)découvrir un concept vraiment très local, celui de limite. Retenez également, au point de vue méthodologique, qu'un raisonnement par l'absurde nous aide souvent à montrer qu'une assertion est fausse localement.

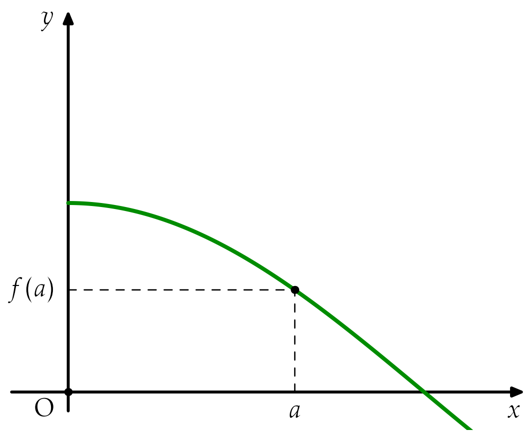
4 Approche intuitive des différentes définitions

4 1 La fonction f est définie en a

Deux cas se présentent.

4 1 a Il n'y a pas de « saut » en a

Approche intuitive



Que l'on vienne de la droite ou de la gauche de a, lorsque x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.
On note alors que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} = f(a)$.
La fonction f est dite **continue** en a.

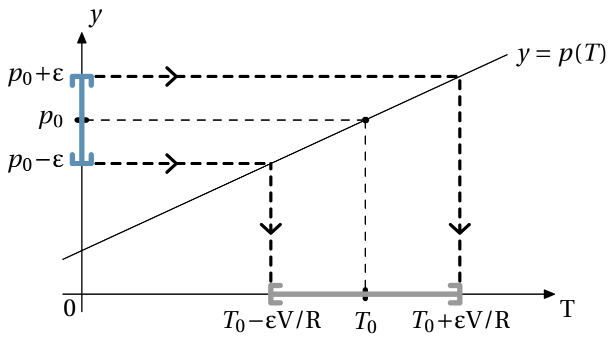
Illustration physique Vous connaissez peut-être la loi des gaz parfaits qui relie pression, volume et température d'une certaine masse de gaz dans certaines conditions :

$$pV = Rt$$

avec R une constante qui dépend de la nature du gaz et des unités employées.
Si on considère un gaz parfait dans un récipient à volume constant, la pression va donc varier en fonction de la température que l'on peut contrôler selon l'équation :

$$p(t) = \frac{R}{V}t$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si l'on veut que la pression reste entre les valeurs $p_0 - \varepsilon$ et $p_0 + \varepsilon$, il suffit que l'on contrôle la température pour qu'elle se situe dans un certain intervalle qui dépendra de la précision ε choisie :



Formalisation mathématique

Définition 3 - 3

Limite finie en un réel
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit f une fonction définie sur l'intervalle I vers $\mathbb{R}$, soit ℓ un réel et soit a un élément ou une extrémité finie de I. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x appartenant à $\mathrm{I} \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, on a $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$, c'est à dire si tout voisinage de ℓ contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x proches de a

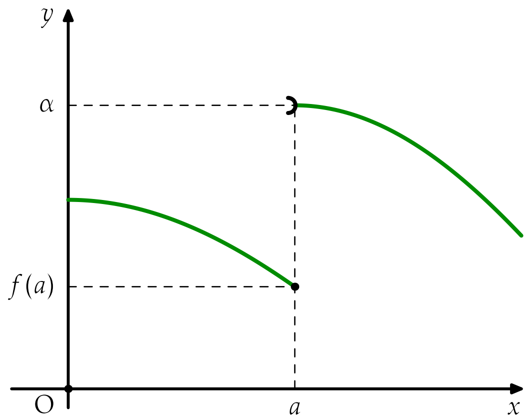
On rencontre parfois la notation équivalente $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$
Pour ce qui est de la continuité en un réel :

Définition 3 - 4

Continuité en un réel
Soit a un réel, et soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a. On dit que f **est continue en** $\boldsymbol{a}$ lorsque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

4 1 b Il y a un « saut » en a

Approche intuitive



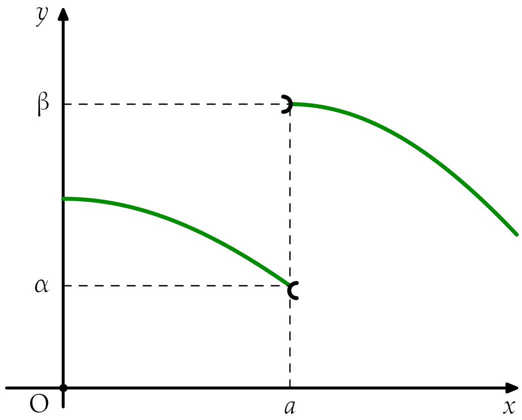
Un petit bonhomme se promenant sur la courbe en venant de la gauche et un autre qui vient de la droite ne vont pas pouvoir se rencontrer.
On note alors que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} = f(a) \neq \alpha = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}}$.
La fonction f n'est pas **continue** en a.

4 2 La fonction f n'est pas définie en a

La encore, plusieurs cas se présentent.

4 2 a Il y a un « saut » en a

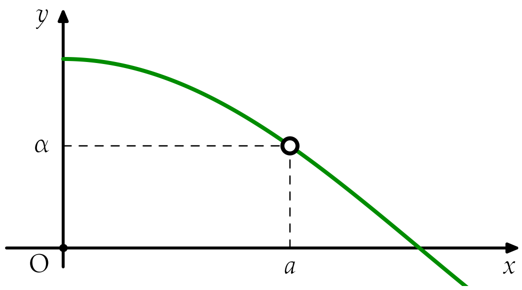
Approche intuitive



Un petit bonhomme se promenant sur la courbe en venant de la gauche et un autre qui vient de la droite ne vont toujours pas pouvoir se rencontrer.
On note alors que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} = \alpha \neq \beta = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}$.
La fonction f n'est bien sûr pas **continue** en a.

4 2 b Il y a un « vide » en a

Approche intuitive



Un petit bonhomme se promenant sur la courbe en venant de la gauche et un autre qui vient de la droite ne vont toujours pas pouvoir se rencontrer car il y a un no-mans-land : un Berlinois de l'Ouest aperçoit un Berlinois de l'Est mais ils ne peuvent se serrer la main.
On note alors que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} = \alpha = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}$.
La fonction f n'est toujours pas **continue** en a mais il y a un espoir...
Il suffit d'abattre le mur de séparation entre les deux villes mais on définit alors une nouvelle ville qui n'est ni Berlin-Ouest, ni Berlin-Est mais Berlin tout court.

Formalisation mathématique Si f n'est pas définie en a mais si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} = \alpha = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}$, alors on peut **prolonger la fonction f par continuité** en créant une nouvelle fonction g définie par :

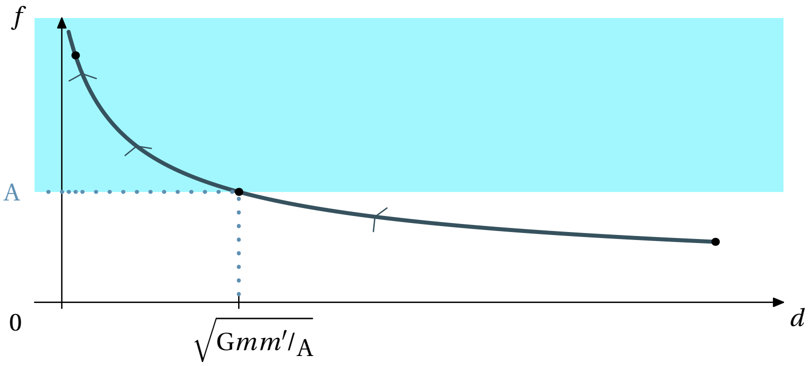
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \forall x \neq a \\ g(a) = \alpha \end{cases}$$

4 2 c Il y a un « mur vertical » en a

Illustration physique Utilisons cette fois-ci la loi de Newton, donnant la force qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels de masses m et m' distants de d

$$f = \mathrm{G}\frac{mm'}{d^2}$$

avec G la constante de l'attraction universelle.



Pour que f reste supérieure à une valeur arbitraire A, il suffit que les points matériels soient à une distance inférieure à $\sqrt{\dfrac{\mathrm{G}mm'}{\mathrm{A}}}$

Formalisation mathématique

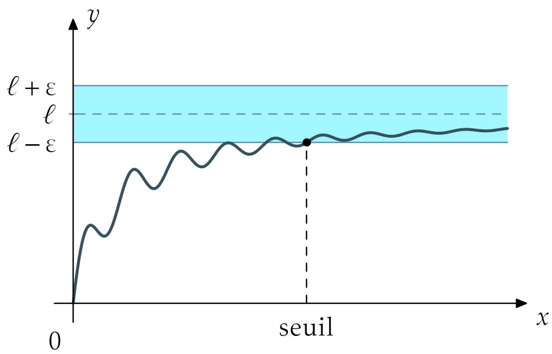
Définition 3 - 5

Limite infinie en un réel
Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I. Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout voisinage de $+\infty$ contient TOUTES les valeurs de $f(x)$ prises dans tous les voisinages de a.

La formulation fait peur mais j'espère que l'illustration physique est assez parlante. Ici, a a pour valeur 0 et $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

4 3 Limite finie en l'infini

Approche intuitive

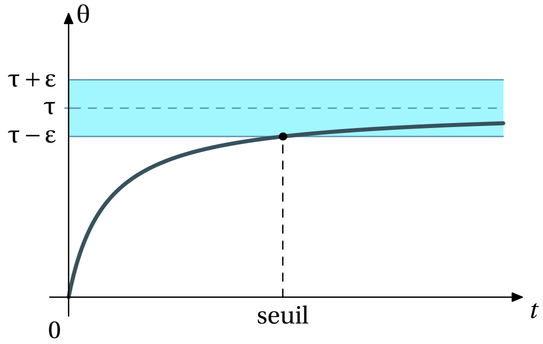


À partir d'un certain seuil, on peut faire rentrer toute la courbe à l'intérieur d'un tube de diamètre aussi petit que l'on veut.

Illustration physique Vous savez qu'au moment de démarrer votre 309 custom megabass, l'huile du moteur est froide puis la température d'huile augmente pour finir par se stabiliser autour de 90°C, que vous rouliez 30 minutes ou 32 heures (sauf incident).
On peut modéliser ce comportement en disant que la température θ de l'huile évolue en fonction du temps t selon la loi :

$$\theta(t) = \tau\left(1 - \frac{1}{(t-1,1)^k}\right)$$

avec k une constante dépendant de la viscosité de l'huile et τ la température du régime stationnaire (90°C pour votre custom).



Ainsi, si l'on veut que la température θ reste comprise dans l'intervalle $]\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon[$, il suffit d'attendre suffisamment longtemps.

Formalisation mathématique

Définition 3 - 6

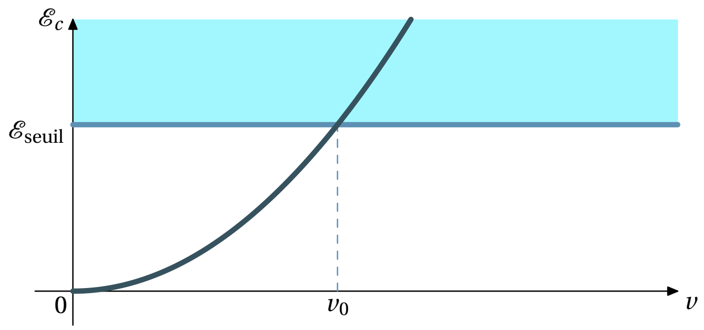
Limite finie en l'infini
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel $\varepsilon > 0$, tout intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Je vous laisse bien sûr adapter cet énoncé au cas d'une limite en $-\infty$.

4 4 Limite infine en l'infini

Vous connaissez la formule donnant l'énergie cinétique d'un solide de masse se déplaçant à la vitesse v :

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}mv^2$$



Si l'on veut que l'énergie cinétique reste supérieure à une certaine valeur quelconque strictement positive $\mathscr{E}_{seuil}$, il suffit que la vitesse reste supérieure à une certaine valeur v_0 qui dépendra du choix de $\mathscr{E}_{seuil}$.

Formalisation mathématique

Définition 3 - 7

Limite infinie en l'infini
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend $+\infty$ lorsque, pour tout réel A strictement positif, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

5 Les théorèmes

Téhessin : Je commence à m'habituer à ces définitions mais serons-nous toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites ?

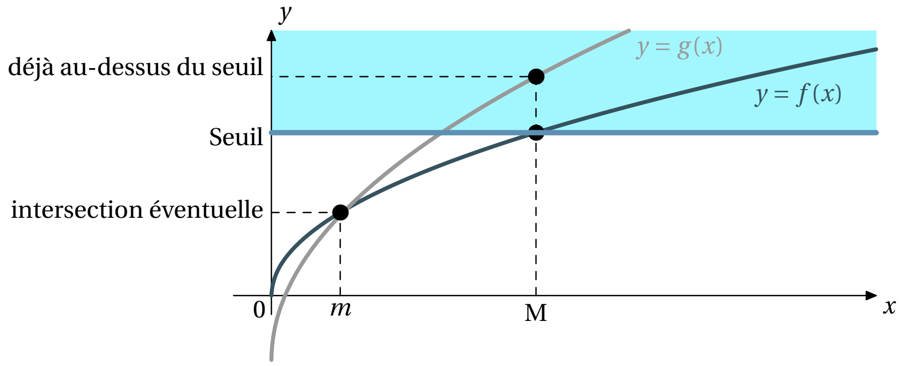
Mathémator : Rassurez-vous, dans la plupart des cas, nous pourrons utiliser les théorèmes que vous avez en fait découvert l'an passé.
Mais avant toute chose, voici le principal théorème du cours

Théorème 3 - 1

En analyse, un dessin avant de résoudre l'exercice tu feras.

5 1 Théorèmes de comparaison

Mathémator : Ce théorème est résumé par le dessin suivant :



Théorème 3 - 2

Si pour tout $x \geqslant m$ on a $g(x) \geqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

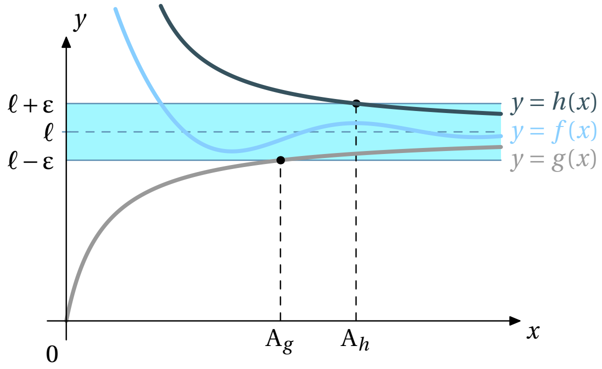
Téhessin : En fait, ça veut dire que si on est plus grand que quelque chose qui tend vers $+\infty$, on tend soi-même vers $+\infty$.

Mathémator : C'est cela, oui, et il existe le pendant en $-\infty$ que je vous laisse imaginer.
Maintenant, le dessin est bien beau, mais il s'agirait de démontrer ce résultat. Or nous n'avons que la définition de la limite en magasin, donc utilisons-la.
On veut prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc on considère un réel positif A quelconque.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe un réel M tel que, pour tout $x \geqslant$ M, on a $f(x) \geqslant$ A
De plus, pour tout $x \geqslant m$, on a $g(x) \geqslant f(x)$
Donc, si on appelle μ le plus grand des réels m et M, pour tout $x \geqslant \mu$, on a $g(x) \geqslant$ A, ce qui exprime que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $g(x) = \sqrt{x} + |\sin x| \geqslant \sqrt{x}$ pour tout réel x, donc par comparaison des limites on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

5 2 Théorèmes des gendarmes

Mathémator : Un nom qui fait un peut peur et qui laisse imaginer le pauvre prisonnier entouré de deux fiers à bras en uniforme. On aurait pu aussi l'appeler théorème des portes d'ascenseur, théorème de la mouche écrasée, théorème du rouleau compresseur, et j'en passe et des meilleures.
Comme d'habitude, l'idée vient du petit dessin suivant



Une fonction f est coincée entre deux fonctions g et h qui tendent vers ℓ en $+\infty$, alors f elle-même va tendre vers ℓ en $+\infty$. Il ne reste plus qu'à trouver un énoncé et une démonstration.

Téhessin : Je veux bien donner l'énoncé :

Théorème 3 - 3

Théorème des gendarmes en l'infini
Soient f, g et h des fonctions et ℓ et A deux réels.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Mathémator : La démonstration se déduit du dessin : on fixe un réel $\varepsilon > 0$ quelconque.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, il existe un réel A_g tel que, pour tout $x > \mathrm{A}_g$ on a $g(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, il existe un réel A_h tel que, pour tout $x > \mathrm{A}_h$ on a $h(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, i.e. $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$
Soit M le plus grand des réels A_g, A_h et A, alors on on a simultanément pour tout $x > \mathrm{M}$

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui traduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On admettra en terminale que ce théorème s'applique aussi pour des limites en des valeurs finies (il suffirait pour le prouver de connaître les définitions des limites en des valeurs finies)

Théorème 3 - 4

Théorème des gendarmes
Soient f, g et h des fonctions, ℓ et A deux réels et ω un réel ou l'infini.
Si $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) = \lim\limits_{x\to\omega} h(x) = \ell$ et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, alors $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \ell$

Par exemple, nous pouvons maintenant étudier la limite de $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.
En effet, vous savez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Pour $x > 0$, on obtient donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

5 3 Opérations sur les limites

Mathémator : Il suffit d'ouvrir votre livre à la page 36 : toutes ces propriétés sont admises même si elles sont démontrables à l'aide des définitions.
Vous devez malgré tout garder en tête qu'apprendre un tel tableau est inutile : il faut le sentir et vous laisser guider par votre intuition...
Pour cela, vous vous doutez bien qu'un infini l'emportera toujours sur un réel et que deux réels se comportent comme d'habitude.
Mais un faux réel se cache dans ce tableau : 0 qui n'est pas le réel zéro mais représente ici un *infiniment petit*.
Dans quatre cases du tableau se cachent des *formes indéterminées* qui sont en fait des combats d'infinis (grands et petits).
Souvenez-vous de $\aleph_0$: il est égal à son carré, à son double... Il se passe des choses bizarres vers l'infini...
Mais gardons en tête l'idée de combat : c'est le plus fort qui l'emportera !
Considérons par exemple $x^3 - x$ au voisinage de $+\infty$: x^3 et x tendent tous les deux vers $+\infty$. On doit donc retrancher deux infinis différents : qui sera le plus fort ? Y aura-t-il match nul ? On ne peut pas le savoir a priori : il faut essayer de *lever l'indétermination*.
Ici, un moyen simple est de factoriser par celui qu'on pressent être le plus fort : x^3.

$$x^3 - x = x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ (un grain de riz divisé par 1,2 milliards de chinois, ça ne laisse pas grand chose à manger pour chacun...) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$: on est donc ramené à « multiplier » $+\infty$ par un nombre positif...plus de problème.

5 4 Limites de fonctions composées

Mathémator : J'espère que vous êtes à l'aise dans la composition - décomposition de fonctions. Par exemple, pouvez-vous décomposer la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \sqrt{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires ?

Téhessin : J'y arrive encore

$$x \xrightarrow{t \mapsto -3t+1} -3x+1 \xrightarrow{t \mapsto \sqrt{t}} \sqrt{-3x+1}$$

Mathémator : Bien. supposons maintenant que vous vouliez étudier la limite de φ en $-\infty$. Nous allons être amenés à décomposer le calcul de limite. Pour nous guider, nous aurons besoin de la propriété (admise) suivante :

Propriété 3 - 1

Limite de fonctions composées
Soient ω, Ω et ℓ des réels ou l'infini et f et g deux fonctions, alors

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \Omega \\ \lim\limits_{T\to\Omega} g(T) = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\omega} g\circ f(x) = \ell$$

Appliquez cette propriété au cas étudié.

Téhessin : Avec les couleurs, cela donne

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -3x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \sqrt{T} = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$$

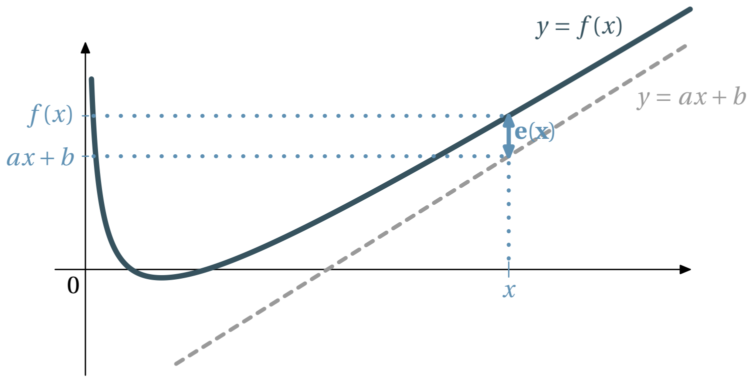
6 Comportement asymptotique

6 1 Comment démontrer qu'une courbe admet une asymptote au voisinage de l'infini ?

Mathémator : Le mot asymptote évoque sûrement quelque chose pour vous.

Téhessin : C'est quand la courbe ressemble à une droite et il y a un rapport avec les limites, mais j'avoue avoir quelque peu oublié le reste.

Mathémator : Et bien reprenons depuis le début. Et pour commencer, bien sûr, un petit dessin :



Pour traduire numériquement le fait que la courbe vient « se coucher » sur la droite, il faudrait mettre en évidence que $e(x)$ devient de plus en plus petit à mesure que x augmente.

Téhessin : Ça sent la limite : il doit falloir dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = 0$

Mathémator : Exactement ! Or $e(x) = f(x) - (ax + b)$ donc

Théorème 3 - 5

asymptote au voisinage de l'infini
La courbe d'équation $y = f(x)$ admet la droite d'équation $y = ax+b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

On obtient un théorème similaire en $-\infty$.

6 2 Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet -elle forcément une asymptote au voisinage de $+\infty$?

Téhessin (à part) : *Je sens le piège* **(tout haut)** Non, bien sûr !

Mathémator : Alors donnez-moi un contre-exemple.

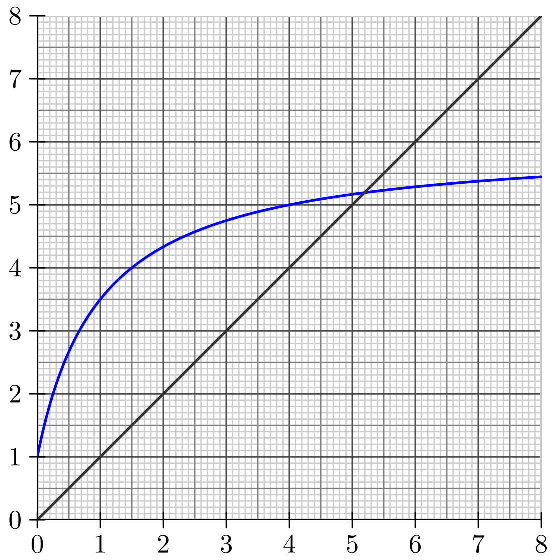
Téhessin : Si j'ai bien compris, la courbe doit « ressembler » à une droite au voisinage de l'infini, or une droite est la représentation graphique d'une fonction affine. Ainsi, pour que la courbe admette une asymptote en l'infini, il faut qu'elle soit la représentation d'une fonction du style

$$x \mapsto ax + b + e(x)$$

avec $e(x)$ qui tend vers 0 en l'infini, c'est à dire une partie affine plus une partie qui compte pour du beurre.

Mathémator : Votre esprit d'analyse m'impressionne mais vous ne m'avez pas donné de contre-exemple.

Téhessin : Il suffit de prendre une partie non affine plus un bout négligeable. Disons $x \mapsto x^2 + 1/x$. Je rentre également la courbe d'équation $y = x^2$ et j'obtiens sur l'écran de ma calto :



Mathémator : Vous obtenez ce que vous appellerez peut-être un jour une branche parabolique. Mais il existe des comportements beaucoup plus irréguliers. Néanmoins vous avez bien compris que l'on peut reconnaître des termes dominants dans une expression. Attention, c'est un problème local. Dans votre exemple, x^2 est dominant en $+\infty$, mais au voisinage de zéro, c'est $1/x$ qui domine.

Téhessin (à part) : *Ça va, j'ai compris : global vs local. Il commence à radoter.*

Mathémator : Après avoir étudié les quelques exemples présentés dans les recettes à Bac page 87, il ne vous reste plus qu'à vous entraîner sur une petite centaine d'exercices pendant ma pause méditation. Que la force soit avec vous !

6 3 Dominants et dominés

Téhessin : Votre intitulé fait un peu peur.

Mathémator : Évitons tout anthropomorphisme et contentons-nous de flotter dans l'éther mathématique.
Comme nous venons de le remarquer, il faudra cette année le plus souvent repérer à l'œil nu la limite en repérant les dominants et les dominés. Dans l'exemple précédant, $1/x$ était le terme dominant et x^2 le terme dominé au voisinage de 0, donc c'est $1/x$ qui « portera » la limite. Mais au voisinage de l'infini, les rôles s'échangent.
C'est parfois moins visible.
Prenez par exemple $3x^2-132x+27$ au voisinage de $+\infty$. Nous sommes confrontés à une forme indéterminée $\infty-\infty$. Mais fermez les yeux et regardez les graphes des fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto x^2$:vous voyez bien que x^2 est bien plus fort que x au voisinage de l'infini, et donc que c'est x^2 qui porte la limite qui sera donc $+\infty$.

Téhessin : Je pourrai écrire ça sur mes copies ?

Mathémator : Et non : ce n'est qu'un support à l'intuition, qui peut parfois être dangereuse comme nous le verrons dans les « vrai ou faux ». Pour le prouver par le calcul, on peut par exemple mettre le plus fort en facteur :
Pour tout $x\neq 0$, $3x^2-132x+27=x^2\left(3-\dfrac{132}{x}+\dfrac{27}{x^2}\right)$
Or

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{132}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{27}{x^2}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{132}{x}+\frac{27}{x^2}\right)=3\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty}3x^2-132x+27=+\infty$$

7 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

7 1 Intervalle

Mathémator : Tout d'abord, qu'est-ce qu'un intervalle ?

Téhessin : Ben c'est quelque chose du style $[a,b]$, ou $]a,b]$ ou $[a,b[$, ou $]a,b[$, ou $]-\infty,b]$ ou etc.

Mathémator : C'est un peu vague. Malheureusement une définition rigoureuse n'est pas envisageable en Terminale. Posons-nous au moins une question : est-ce que $\mathbb{R}^*$ est un intervalle ?

Téhessin : Je pense que non : il n'entre dans aucune des catégories car il a un « trou ».

Mathémator : C'est bien vu. Nous devrons nous contenter de cette absence de « trou » pour caractériser les intervalles.

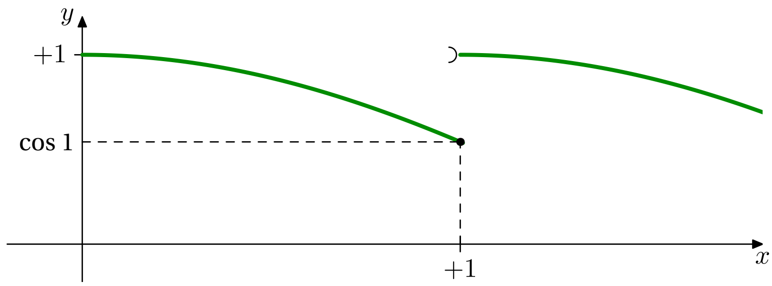
7 2 Quelles sont les fonctions dont le graphe est un trait continu ?

Mathémator : On peut déjà remarquer que c'est le cas de la plupart des fonctions que vous connaissez Téhessin. En effet, on peut considérer que les graphes des fonctions polynômiales, rationnelles, racine carrée, sinus,... sont des « traits continus », c'est-à-dire qu'on n'a pas à « lever le crayon » pour les tracer.

Mais attention, ce n'est pas toujours le cas. Nous avons déjà étudié la fonction

$$g : [0,2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0,1] \\ \cos(x-1) & \text{si } x \in]1,2] \end{cases}$$

et son graphe n'est pas un « trait continu ».



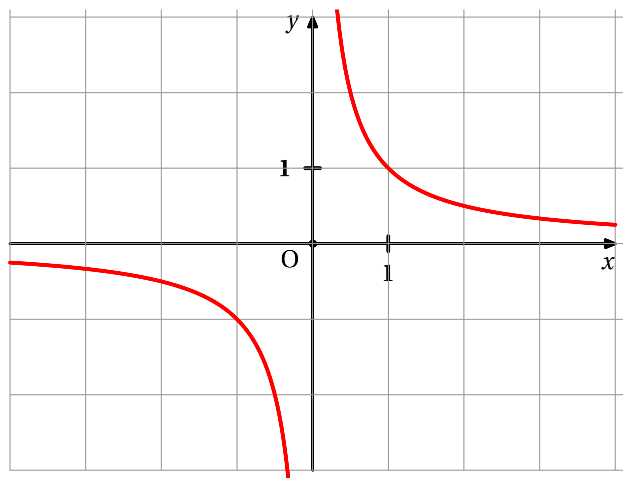
Téhessin : Mais cette notion de « trait continu » a-t-elle un sens mathématique ?

Mathémator : Pour le moment, cette notion de « trait continu » est juste une notion intuitive que tout le monde comprend. Et ce que je vous propose de faire maintenant, c'est de chercher quelle propriété une fonction doit vérifier pour que son graphe soit un « trait continu ».

La première condition est que la fonction soit définie sur un intervalle. Vous voyez bien par exemple que le graphe de la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

n'est pas un « trait continu » et la raison en est que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.



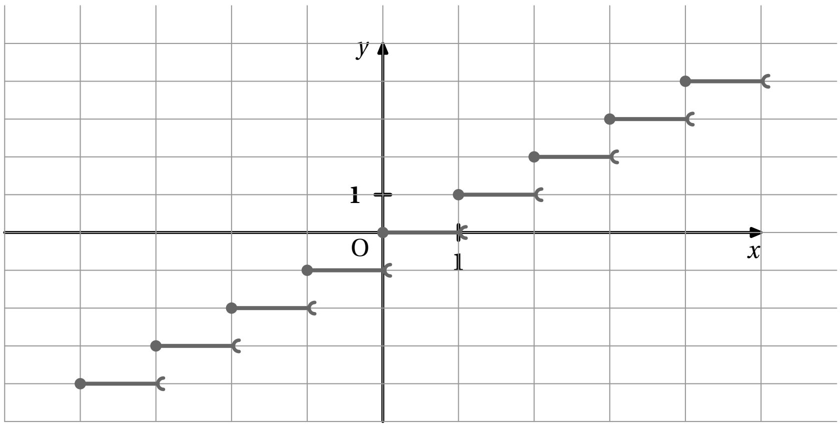
On se limite donc à une fonction définie sur un intervalle. Pouvez-vous me dire, Téhessin, à quelle condition son graphe est un « trait continu » ?

Téhessin : J'ai peut-être une idée. La fonction g précédente est bien définie sur un intervalle mais elle a un graphe « en deux morceaux » parce que $g(x)$ est défini par deux formules différentes suivant les valeurs de x. Mais s'il n'y a qu'une seule formule, comme pour les fonctions polynomiales, cosinus ..., alors le graphe sera un trait continu.

Mathémator : Non Téhessin. La fonction partie entière

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{E}(x)$$

est définie par « une seule formule », comme vous dites, mais il faut lever le crayon pour tracer son graphe.



Vous sentez bien que la notion de « fonction définie par une seule formule » est trop vague. Il faudrait préciser son sens, et ce n'est pas facile. Revenons plutôt à la fonction g : à votre avis, pour quelle raison son graphe n'est-il pas un trait continu ?

Téhessin : Peut-être parce que les limites de g à gauche et à droite en 1 sont différentes.

Mathémator : C'est ça, et comme ces deux limites sont différentes, g n'a pas de limite en 1. Plus généralement, si l'on considère une fonction f définie sur un intervalle I, le graphe Γ_f ne peut être un « trait continu » que si f admet une limite en tout point a de I. Et d'ailleurs, comme f est définie en a, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$. On constate que c'est cette condition sur f qui rend compte du fait que Γ_f est un « trait continu ». Mais plutôt que de dire *le graphe de f est un trait continu*, on dira *la fonction f est continue*.

Définition 3 - 8

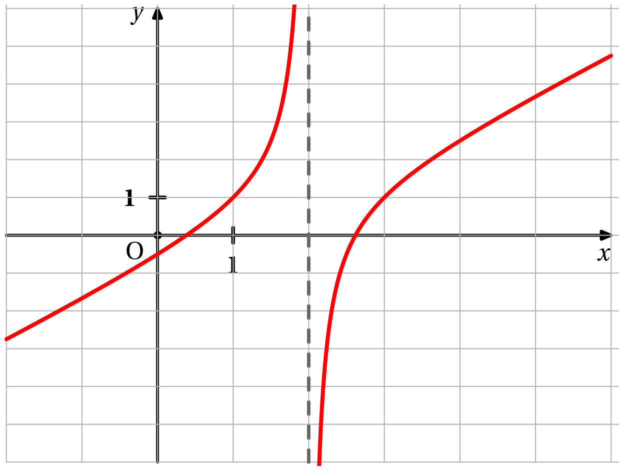
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. On dit que f est continue lorsque, pour tout $a \in \mathrm{I}$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui revient à dire que f est continue en tout point de I.

Téhessin : Mais il est impossible de vérifier pour chaque point que la fonction y est continue !

Mathémator : Certes ! Nous pouvons malgré tout aisément vérifier que les fonctions polynômes, sinus, cosinus, valeur absolue, racine carrée sont continues.

Dans la pratique nous utiliserons les théorèmes opératoires. Nous pouvons ainsi montrer, grâce aux théorèmes opératoires sur les limites que les sommes, produits, quotients et composées des fonctions de référence sont continues **là où elles sont définies**.

Par exemple, nous écrirons que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ est continue sur $]-\infty, 2[$ ET sur $]2, +\infty[$ comme quotient de fonctions polynomiales continues.

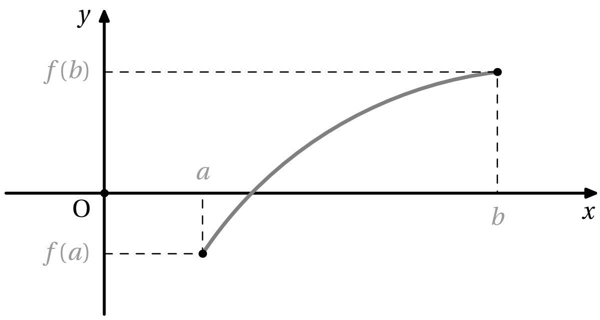


Téhessin : Donc si j'ai bien compris, il faut interpréter la continuité d'une fonction définie sur un intervalle en disant que son graphe est un « trait continu ».

Mathémator : C'est ça.

7 3 Application fondamentale : une fonction continue peut-elle changer de signe sans s'annuler ?

Téhessin : Je pense que non ! Car pour relier par un « trait continu » un point situé en dessous de l'axe Ox à un point situé au dessus, il faudra couper cet axe.



Mathémator : Très bien ! L'interprétation intuitive de la continuité de f vous a permis de deviner le résultat. Mais il faut maintenant le démontrer rigoureusement en revenant à la définition de la continuité. Autrement dit, étant donnée une fonction f continue, définie sur un intervalle contenant a et b avec $a < b$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés, comment montrer l'existence d'un zéro de f sur $]a, b[$, c'est-à-dire d'un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$?

Cette démonstration étant délicate mais constituant une très intéressante application du théorème des suites adjacentes, nous nous en occuperons en TD un peu plus tard cette année.

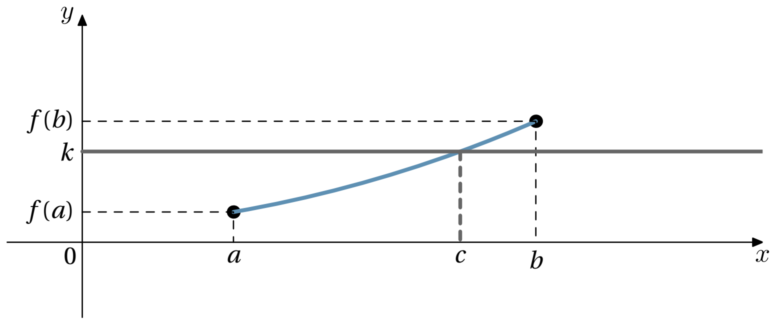
7 4 Une fonction f continue sur [a,b] prend-elle toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b) ?

Téhessin : Est-ce que ce n'est pas quasiment le même problème que celui de la question précédente ?

Mathémator : Effectivement. Alors voilà le résultat.

Théorème 3 - 6

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



La preuve est très simple. Si $f(a)$ ou $f(b)$ est égal à k, on prend $c = a$ ou $c = b$. Et sinon, on applique le résultat de la question précédente à la fonction auxiliaire

$$g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - k$$

On peut le faire car g est continue et car $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls et de signes opposés puisque λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

8 Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les limites : une interview exclusive.

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction strictement croissante tend forcément vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : une fonction qui ne fait que croître va forcément monter vers $+\infty$. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est forcément croissante pour x assez grand ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !
Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction bornée tend forcément vers un réel en $+\infty$?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la fonction est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !

Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

Téhessin : Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?

Mathémator : On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !

Téhessin : Est-il vrai qu'une fonction tendant vers M en $+\infty$ est majorée par M

Mathémator : J'avoue que c'est difficile à croire, et pourtant la moitié des élèves sont tombés dans le panneau lors de l'épreuve du bac 2003.
Je vous laisse trouver un *contre-exemple*.

9 Recettes à Bac

9 1 Comment étudier la position relative de deux courbes ?

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ et $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = g(x)$. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
En effet, si nous obtenons par exemple $f(x) - g(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle I, alors $f(x) \geqslant g(x)$ sur I et donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur I.

9 2 Comment montrer qu'une courbe admet une asymptote d'équation y=ax+b au voisinage de ω ?

Il suffit de montrer que $[f(x) - (ax + b)]$ tend vers 0 quand x tend vers ω.

9 2 a Asymptote horizontale

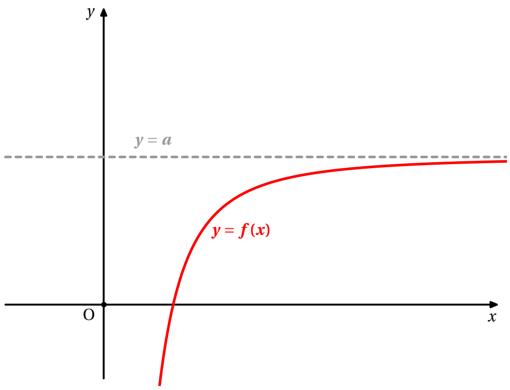
Théorème 3 - 7

Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

Il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème 3 - 5 page 81



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

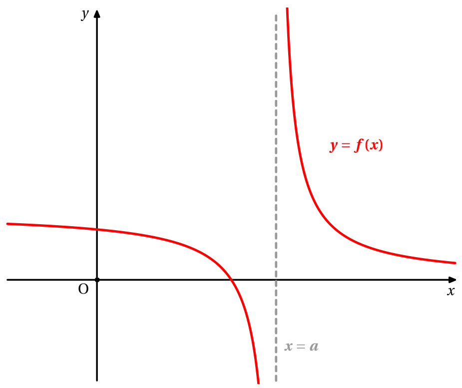
9 2 b Asymptote verticale

Définition 3 - 9

Soit a un réel. Si une fonction f vérifie

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.



$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty.$$

Exemple

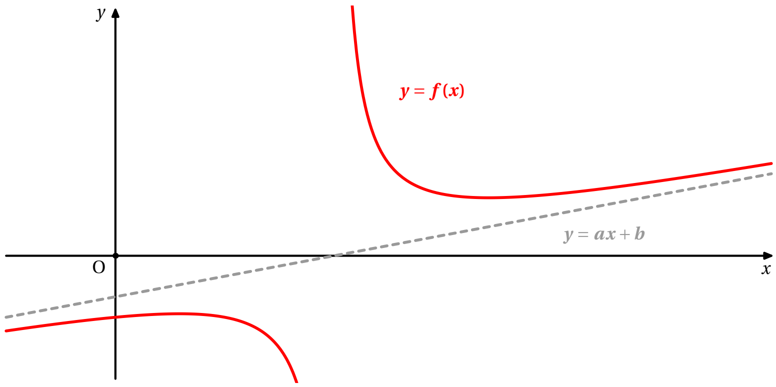
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Étudier les limites de f au voisinage de 1 puis interpréter graphiquement ce résultat.

9 2 c Asymptote oblique

On utilise le théorème 3 - 5 page 81.



$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+p))=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+p))=0.$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+2x-1.$$

Prouver que la droite Δ d'équation $y=2x-1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

9 3 Comment montrer qu'une fonction est paire ?

Il faut vérifier que l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à zéro puis que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f(-x)=f(x)$.
Nous en déduisons que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffira donc d'étudier la fonction sur la « moitié » de l'ensemble de définition, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie.

9 4 Comment montrer qu'une fonction est impaire ?

cf le paragraphe précédent en remplaçant $f(-x)=f(x)$ par $f(-x)=-f(x)$ et « symétrique par rapport à l'axe des ordonnées » par « symétrique par rapport à l'origine du repère ».

9 5 Comment montrer qu'une courbe admet le point A(a,b) comme centre de symétrie ?

Faîtes avant tout un dessin pour visualiser que A est le milieu du segment $[\mathrm{MM}']$ avec $\mathrm{M}\big(x,f(x)\big)$ et $\mathrm{M}'\big(x',f(x')\big)$. Alors d'une part $\dfrac{x+x'}{2}=a$, donc $x'=2a-x$ et d'autre part $\dfrac{f(x)+f(x')}{2}=b$, *i.e.*

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

9 6 Comment montrer qu'une fonction est périodique ?

Il s'agit de trouver un réel T tel que pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition de f, alors

$$f(x+\mathrm{T})=f(x)$$

Il suffira alors d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0,\mathrm{T}]$, puis de déduire le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $k\overrightarrow{i}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Vous connaissez bien sûr la fonction sinus qui vérifie $\sin(x+2\pi) = \sin x$ pour tout réel x et qui est donc 2π-périodique.

9 7 Comment étudier le signe d'une expression ?

Vaste problème...Retenir malgré tout qu'en règle général, nous savons étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de polynômes du 1er ou du 2nd degré, d'exponentielles (qui sont toujours positives), de cosinus ou de sinus, de logarithmes népériens... Vous chercherez donc en général à factoriser ou à réduire au même dénominateur votre expression.

Si cela s'avère impossible algébriquement, on vous suggérera d'étudier une fonction. Alors soit elle admettra comme extremum zéro, soit vous déterminerez une approximation de la valeur d'annulation de f grâce au théorème de la bijection et vous conclurez à l'aide du tableau de variations.

9 8 Qu'est-ce qu'une fonction croissante sur I ?

C'est une fonction qui conserve l'ordre sur I.

9 9 Comment lever une indétermination ?

Il n'y a pas une méthode mais des méthodes. Il ne s'agit donc pas d'apprendre par cœur des recettes (tiens tiens...), ce qui vous induirait à écrire de grosses sottises.
Vous pouvez dans un premier temps repérer des termes « négligeables » devant d'autres et factoriser par le plus « fort » (c'est le cas par exemple des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$).
Vous pouvez minorer ou majorer par des valeurs permettant de conclure à l'aide des théorèmes de comparaison (c'est le cas de la fonction cosinus qui vérifie

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

pour tout réel x et donc

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

pour $x \neq 0$ et finalement

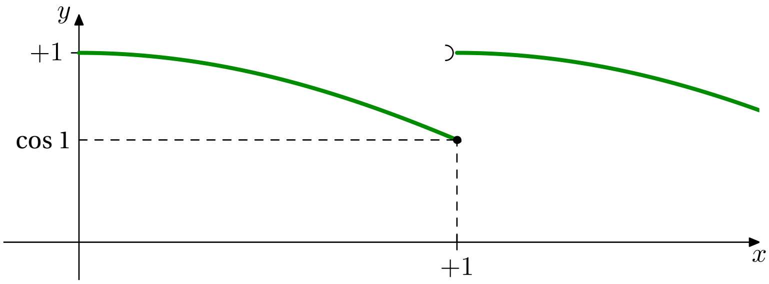
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

par application du théorème des gendarmes.
Vous pouvez utiliser les propriétés algébriques de certaines fonctions pour retrouver des limites connues ($x^2+1 = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}$...)
Dans le cas de l'étude de limites de fonctions irrationnelles, le recours à la quantité conjuguée peut s'avérer utile.
Dans les cas désespérés, vous pouvez essayer de reconnaître la limite d'un taux de variation et donc utiliser la dérivée associée.

9 10 Y a-t-il différents types de discontinuité ?

Mathémator : Oui ! Une fonction f est continue en a si et seulement si elle a une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$. Elle peut donc être discontinue en a pour plusieurs raisons.

- Première raison possible : f admet une limite à gauche et à droite en a, mais ces deux limites ne sont pas égales. C'est le cas de la fonction f_2 de la question précédente.



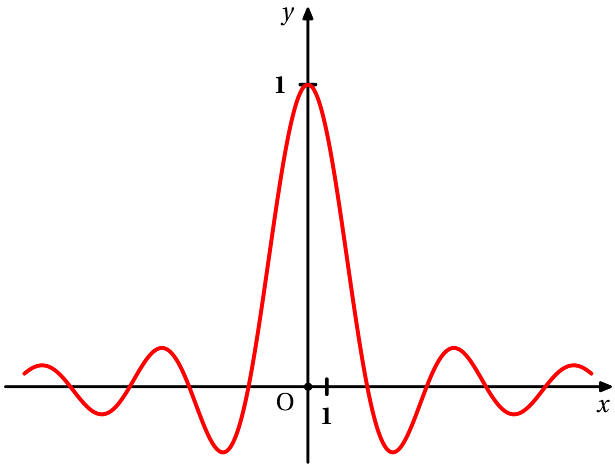
– Deuxième raison possible : f admet une limite commune à gauche et à droite en a, mais f n'est pas définie en a ou admet une autre valeur que la limite commune. C'est le cas par exemple de la fonction sinus amorti, très importante en physique

$$f_4 \ : \ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

Nous avons montré en exercice que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_4(x) = \lim\limits_{x\to 0} = 1.$

Il suffit donc maintenant de créer la *nouvelle fonction* g suivante

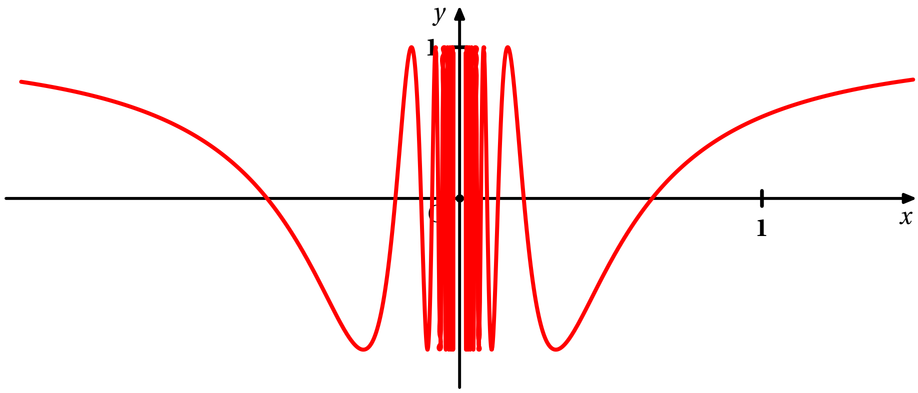
$$g \ : \ x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pour tout } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On dit alors qu'on a *prolongé f_4 par continuité en 0.*

– Troisième raison possible, et les choses deviennent compliquées : f n'a pas de limite à droite ou à gauche en a. Il faut bien avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions ont une limite à gauche et à droite. Mais il faut avoir vu ces contre-exemples une fois dans sa vie, pour bien comprendre la théorie, comme celui de la fonction f_5 définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^* \quad f_5(x) = \cos(1/x), \text{ et } f_5(0) = 0$$



Elle n'a pas de limite à droite ni à gauche en 0. Quand x tend vers 0, $f_5(x)$ oscille continûment entre -1 et 1, de plus en plus vite à mesure que x se rapproche de 0.

Pour montrer que f_5 n'a pas de limite à droite en 0, nous aurons besoin d'avoir étudié les suites : il faudra donc patienter un peu.

Téhessin (à part) : *Ouf !...*

9 11 Comment montrer que deux courbes se rencontrent ?

Téhessin : Mais c'est encore le même genre de problème, à condition de supposer que les deux courbes sont des « traits continus ».

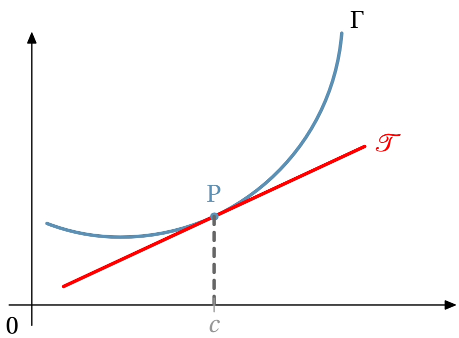
Mathémator : Ce que nous supposerons. Et vous avez raison, on pourra *souvent* se ramener au théorème des valeurs intermédiaires.
Montrer que les graphes des fonctions continues f et g se rencontrent revient à montrer qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$. On introduit alors la *fonction auxiliaire* $f - g$, et pour montrer qu'elle s'annule, il suffit d'après le théorème des valeurs intermédiaires de trouver a et b tels que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f(b) \geqslant g(b)$.

On peut par exemple utiliser cette technique pour montrer qu'une fonction f continue définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans ce même intervalle $[0,1]$ admet un point fixe, car cela revient à montrer que son graphe rencontre la première bissectrice.

Nous traiterons ces exemples en exercices.

Téhessin : Vous aviez l'air de dire tout à l'heure que le théorème des valeurs intermédiaires ne permettait pas toujours de montrer que deux courbes se rencontrent.

Mathémator : Oui, dans le cas où les deux courbes se rencontrent « sans se croiser ». Par exemple, cela peut se produire avec le graphe d'une fonction ayant certaines propriétés et l'une de ses tangentes.



On peut avoir $f(c) = g(c)$ sans qu'il existe a et b distincts tels que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f(b) \geqslant g(b)$.

9 12 Comment montrer qu'une équation admet une unique solution ?

Mathémator : Le TVI s'avère fort utile comme vous venez de le découvrir, pour montrer qu'une équation admet *au moins* une solution. Il a pourtant un défaut [d].

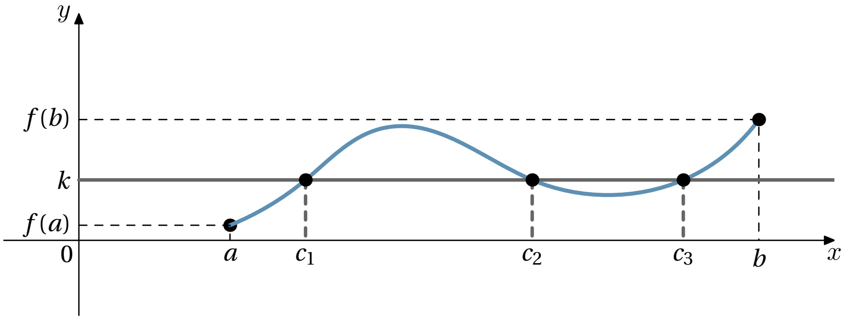
Téhessin : On sait que l'équation admet *au moins* une solution, mais on ne sait pas *combien* de solutions cela représente [e].

Mathémator : Vous avez mis le sabre laser sur la faiblesse du TVI. En fait, il suffit de rajouter une petite hypothèse au TVI pour le voir se transformer en TSU.

Téhessin : TSU, TSU, mmmm.... J'y suis ! Théorème de LA solution unique [f].

Mathémator : Oui ! Alors, comment être sûr de l'unicité de la solution ?

Téhessin : Je suppose qu'un petit dessin devrait m'aider.



En fait, si la courbe joue aux montagnes russes, certains réels de l'intervalle $\left[f(a), f(b)\right]$ auront plusieurs antécédents, ce qui ne sera plus vrai si f est strictement monotone.

Mathémator : Nous pouvons à présent énoncer le théorème de LA solution unique [g]

Théorème 3 - 8

Théorème de la solution unique (Théorème de la bijection)
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

La démonstration en est simple : l'hypothèse rajoutée nous indique dans quelle direction chercher. Je vous laisse donc la rédiger...

Téhessin : ...à titre d'exercice, je sais.

9 13 Comment résoudre une équation numérique par dichotomie ?

Mathémator : Fort de ces nouveaux pouvoirs mathématiques, montrer que l'équation

$$x^4 + x = 1$$

admet une unique solution x_0 sur $[0, 1]$ ne va vous poser aucun problème.

Téhessin : Il doit suffire d'étudier la fonction

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^4 + x$$

d. Contrairement à vous, chanceux lecteur, Téhessin ne peut distinguer à l'oreille les caractères en italique
e. Vous devez admettre que Téhessin assure un max
f. Faut quand même pas pousser : c'est plus un élève, c'est un héros de film américain
g. Pour le bac, un tableau de variation complété suivi d'une phrase du style « par lecture du tableau de variation » suffira

D'après les théorèmes généraux elle est continue sur $[0,1]$. On vérifie aisément qu'elle est srictement croissante sur cet intervalle. Enfin $f(0)=0$ et $f(1)=2$. Je dégaine alors le TSU pour conclure.

Mathémator : Vous assimilez vite. Comment feriez-vous, Téhessin, pour déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près avec votre calculatrice ?

Téhessin : Rien de plus simple : je tape

```
solve(x^4+x=1,x)
```

et la calculatrice me répond

```
-1.220744085,  0.7244919590
```

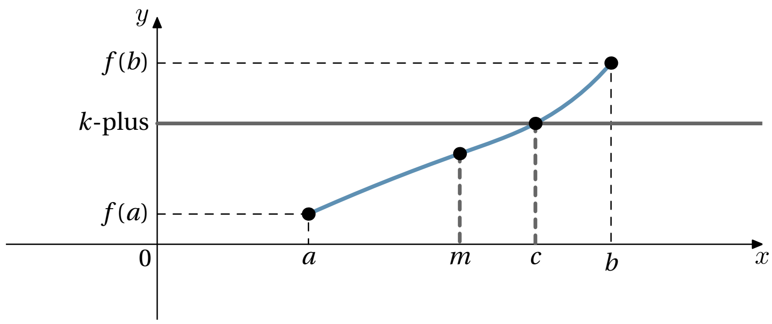
Or, comme $x_0 \in [0,1]$, je ne garde que le deuxième solution.

Mathémator : , *à part* : Il m'a roulé...*(à voix haute)* Certes, certes...euh...mais imaginons que votre calculatrice n'ait pas de touche `solve`.

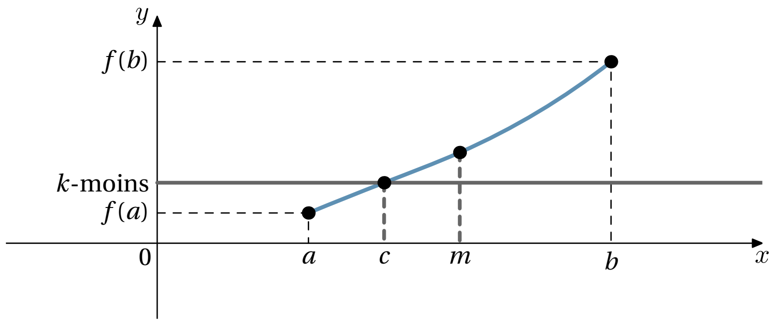
Téhessin : J'essaie différentes valeurs. Si je tombe sur une image supérieure à 1, je prend un x plus petit, et vice versa.

Mathémator : En fait, on peut systématiser la recherche des différentes valeurs de x pour minimiser le nombre de calculs.
Considérons une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et telle que $g(a)<k$ et $g(b)>k$. Alors l'équation $g(x)=k$ admet une unique solution c dans $]a,b[$ d'après le TSU. Pour obtenir une valeur approchée de c, on va « dichotomer » le segment $[a,b]$, c'est-à-dire qu'on va le couper en deux, par exemple par le milieu $m=(a+b)/2$. Le monde alors se sépare en deux catégories :

➥ si $g(m)<k$, alors $c \in]m,b[$



➥ si $g(m) \geqslant k$, alors $c \in]a,m]$



En répétant ce procédé, on pourra construire une suite de segments « emboîtés » contenant c, centrés en m_n et de longueurs aussi petites que l'on veut. Vous pourrez peut-être démontrer l'année prochaine que la suite (m_n) converge vers c, et que les différentes valeurs de m_n sont autant de valeurs approchées de c.

Téhessin : Mais à quoi sert cette méthode puisque ma calculatrice possède la fonction solve ?

Mathémator : Justement, le (la) programmeur(se) de votre calculatrice a probablement utilisé une méthode pour écrire le programme associé à la touche solve, un peu plus compliquée que la dichotomie, mais un futur scientifique et informaticien comme vous doit donc connaître la méthode de dichotomie.

9 14 Avec XCAS

Pour mettre tout ceci en pratique, ouvrons XCAS

```
dicho(f,p,a,b):={
local aa,bb,k;
aa:=a;
bb:=b;
k:=0; // on cree un compteur d'iterations
 while( (bb-aa)>p) {
  if ( f(0.5*(bb+aa))*f(bb)>0 )
    then{ bb:=0.5*(aa+bb) }
    else{ aa:=0.5*(aa+bb) }
 k:=k+1; // on rajoute 1 au compteur
 }
return 0.5*(bb+aa)+" est la solution trouvee  apres " +k+ " iterations"
    ;
}:;
```

ce qui donne pour $\sqrt{2}$

```
  Digits:=30:;
  dicho(x->x^2-2,10^(-30),1,2)
```

Et on obtient :

`1.41421356237309504880168872420 9 est la solution trouvée après 100 itérations`

.

EXERCICES

Avec les définitions

3 - 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

1. *Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près de $f(1)$, $f(32)$, $f(320)$ et $f(3232)$.*
2. *Observer la représentation graphique de f donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en $+\infty$?*
3. *On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire $]1,99;2,01[$.*
   Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]1,99;2,01[$ (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2+1/x^2$)
4. *On considère l'intervalle $]2-r,2+r[$ avec $r > 0$.*
   Montrer que pour x supérieur à un certain x_0 à déterminer en fonction de r , tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]2-r,2+r[$.
5. *Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$*

3 - 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^3+x^2$

1. *Donner les valeurs de $g(32)$, $g(320)$ et $g(3232)$.*
2. *Observer la représentation graphique de g donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de g en $+\infty$?*
3. *On considère l'intervalle $]100;+\infty[$. Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in]100,+\infty[$.*
4. *On considère un intervalle $]A,+\infty[$, avec $A > 0$. Montrer que pour x supérieur à $\sqrt{A}$, tous les $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]A;+\infty[$.*

3 - 3

Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2x+3$
Démontrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3 - 4

On considère la fonction h définie sur $]1,+\infty[$ par $h(x) = 2+\dfrac{3}{(x-1)^2}$

1. *Justifiez que h est bien définie sur $]1,+\infty[$.*
2. *Observer la représentation graphique de h donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de h en 1 ?*
3. *On considère l'intervalle $]1000;+\infty[$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x) \in]1000,+\infty[$.*
4. *On considère un intervalle $]A,+\infty[$, avec $A > 2$. Donnez une condition suffisante portant sur x pour que $h(x) \in]A;+\infty[$.*
5. *Justifiez que $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = +\infty$.*

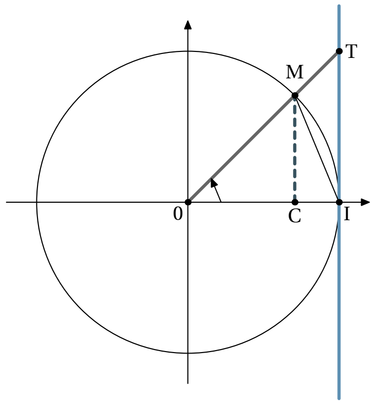
Avec les théorèmes

3 - 5 Limite en zéro

Soit $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$. Étudiez sa limite en zéro.

3 - 6 De la géométrie pour calculer une limite

Voici une première méthode de calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Pourquoi suffit-il d'étudier la limite pour des valeurs de $x > 0$?



Utilisez la figure pour obtenir que, pour tout $x \in]0,\pi/2[$,

$$\sin x < x < \tan x$$

Déduisez-en un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ pour tout $x \in]0,\pi/2[$ et concluez après avoir étudié la parité de la fonction.

3 - 7 Limites trigonométriques

En supposant connu le résultat de l'exercice précédent, calculez $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
Pour la 2éme, utilisez la formule bien connue $\cos(2a) = 1-2\sin^2(a)$

3 - 8 Limite et radicaux

Calculez :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$

Applications directes du cours

3 - 9

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

1. x^2-5x+6 ;
2. $-4x^2+6x-7$;
3. $\dfrac{2x+1}{x-1}$;
4. $\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-3}$;
5. $\dfrac{x^3}{x^2+1}-x$;
6. $\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

3 - 10

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

1. $\dfrac{x+\sin(x)}{-2x+\cos(x)}$;
2. $2x-\sqrt{x^2+3x-1}$;
3. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$.

3 - 11

Étudier les limites des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$ en $a=-2$;
2. $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ en $a=-2$;
3. $\dfrac{-x^2+x+6}{2x^2-5x+2}$ en $a=2$;
4. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ en $a=0$;
5. $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en $a=0$;
6. $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ en $a=0$;
7. $\tan(x)$ en $a=\frac{\pi}{2}$;
8. $\dfrac{\sin(3x)}{x}$ en $a=0$.

3 - 12

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}.$$

1. *Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+1}$.*
2. *Calculer la limite de $f(x)-(ax+b)$ en $+\infty$ puis en $-\infty$.*
3. *En déduire que la courbe représentative de f, $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$ et en $+\infty$.*
4. *Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Δ.*

Approfondissement

3 - 13

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en $+\infty$;
2. $x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-2x}$ en 2 ;
4. $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en 0 ;
5. $\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ en 0 avec $ab\neq 0$;
6. $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.

3 - 14

Étudier selon les valeurs de a et de b les limites de

1. $f : x\mapsto \sqrt{x^2+5x+1}+ax+b$ *en $+\infty$ et en $-\infty$*
2. $g : x\mapsto \frac{ax^2-(2a+1)x+2}{x-1}$ *en 1.*

3 - 15 ROC

Question de cours (Métropole, Nouvelle Calédonie novembre 2007)

1. *Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :*
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. *Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.*

Continuité

3 - 16 A mad tea party

« Reprenez donc un peu de thé » propose le Lièvre de Mars.
« Je n'ai rien pris du tout, je ne saurai donc reprendre de rien ! »
« Vous voulez dire que vous ne sauriez reprendre de quelque chose » repartit le Chapelier.
« Quand il n'y a rien, ce n'est pas facile d'en reprendre ».

- *Alors comme ça, vous êtes étudiante ?*
- *Oui, en mathématiques par exemple.*
- *alors que vaut cette fraction : un sur deux sur trois sur quatre ?*
- *Eh bien ...*
- *Elle vaut deux tiers, la devança le Loir.*
- *Ou trois huitièmes si vous préférez, ajouta le Lièvre de Mars.*
- *Ou encore un sur vingt-quatre, affirma le Chapelier.*
- *En fait, je crois que...*
- *Aucune importance ! Dîtes-nous plutôt combien vous voulez de sucre dans votre thé ?*
- *Deux ou trois, ça dépend de la taille de la tasse.*
- *Certainement pas, car de toute façon, deux ou trois c'est pareil.*
- *Parfaitement ! approuva le Loir en fixant Alice qui écarquillait les yeux.*
- *Ce n'est pourtant pas ce qu'on m'a appris, fit celle-ci.*
- *Pourtant, ce n'est pas compliqué à comprendre, en voici une démonstration des plus élémentaires*
  On sait que pour tout entier n on a successivement

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - 2n - 1 = n^2$$

Retranchons $n(2n+1)$ des deux côtés

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

Mézalor, en ajoutant $(2n+1)^2/4$, on obtient

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

Soit

$$\left((n+1) - \frac{2n+1}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2$$

En passant à la racine carrée, on obtient

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

d'où

$$n+1 = n$$

Et si je prends $n = 2$, j'ai aussitôt $3 = 2$

- *Alors, qu'est-ce que vous en dites ?*
- *Je...commença Alice.*
- *D'ailleurs, cela prouve que tous les entiers sont égaux, la coupa le Lièvre de Mars.*
- *Pas mal du tout ! Qu'en dites-vous mademoiselle la mathématicienne ?*
- *Je vais vous dire tout de suite ce que j'en pense*
- *Ah non ! Nous préférerions de loin que vous pensiez ce que vous allez nous dire.*
- *C'est pareil ! grinça Alice qui commençait à en avoir assez.*
- *Comment ça, c'est pareil ? Dire ce que l'on pense ce serait pareil que penser ce que l'on dit ? S'étrangla le Lièvre de Mars.*
- *Incroyable ! Et manger ce qu'on voit ce serait pareil que voir ce qu'on mange ?*
- *Mais...*
- *Et respirer quand on dort pareil que dormir quand on respire ?*
- *En logique, nous vous mettons 3 sur 5.*
- *Autant dire moins que un.*
- *C'est à dire zéro, puisque si 2=3 alors 1=0.*
- *Parce que chez vous, 3 c'est moins que 1 ? s'indigna Alice.*
- *On se demande ce qu'on vous apprend à l'école ! Bien sûr que oui ! Tenez, considérez*

$$f(x) = \frac{x^2+32}{2x^2+1} + \frac{|x|+1}{2x+51}$$

  Eh bien il est facile de voir que cette fonction a pour limite 0 en moins l'infini et 1 en plus l'infini.
- *Je ne dis pas le contraire, protesta Alice.*
- *Donc l'image par f de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]0,1[$, or $f(0) = 3$, donc 3 appartient à $]0,1[$ à ce titre : on a bien 3 plus petit que 1.*
- *C'est de la folie pure, pensa Alice...*

Merci à Pierre Osadtchy

Exercices divers

3 - 17 Cheshire cat's journey

Un chat du Cheshire parcourt 10 km en 2 heures. montrez qu'il existe un intervalle de temps de durée 1 heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km.
Introduisez la fonction qui à t associe le nombre de km parcourus en t heures puis la fonction $t \mapsto d(t+1) - d(t)$

3 - 18 Racine d'un polynôme

Montrez que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. Il faut considérer la fonction polynomiale associée et chercher un théorème dans le cours qui vous permette de conclure.

3 - 19 Partie entière

Étudiez et représentez graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$

3 - 20 Partie entière : le retour

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}\ :\ x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$ On rappelle que $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

Montrez que $\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x)+1$ puis que F est périodique. et représentez sommairement F sur un graphique.

3 - 21 Point fixe

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
Montrez qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $f(x_0) = x_0$. Illustrez votre propos à l'aide d'un schéma.

3 - 22 Partie entière will never die

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudiez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(-3nx)}{-2n}$

Commencez par encadrer $\mathrm{E}(-3nx)$

3 - 23 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudiez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx)$

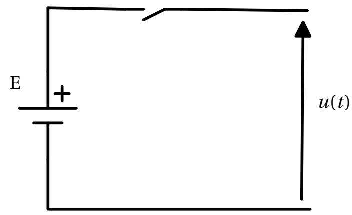
3 - 24 Résolutions analytiques d'équations

1. *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$.*
   En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. *On considère l'équation (E) $\sin x - \dfrac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.*
   a. *Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.*
   b. *Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).*
   c. *Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.*

3 - 25 Échelon de Heaviside

1. *Occupons-nous de fonctions utilisées couramment en électricité (et aussi en infographie, en musique, etc.) On considère le cicuit très simple ci-dessous. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on mesure la tension $\mathrm{U}(t)$. Elle peut être définie par*

$$t \mapsto \mathrm{U}(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Représentez graphiquement la fonction U.

2. *On note f la fonction $f\ :\ t \mapsto \mathrm{U}(t-2)$ et $g\ :\ t \mapsto \mathrm{U}(t+2)$.*
   En électricité, on appelle l'une échelon retardé et l'autre échelon avancé : pourriez-vous dire qui est qui ?

3 - 26 Fonction porte

Représentez la fonction

$$\Pi\ :\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } |x| \leqslant 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases}$$

Donnez une interprétation physique de cette fonction si x représente la fréquence d'un signal émis par un émetteur radio.

3 - 27 Signal carré

Pour s'amuser, on fait varier le sens du courant. Représentez la fonction φ qui est de période 1 et vérifie

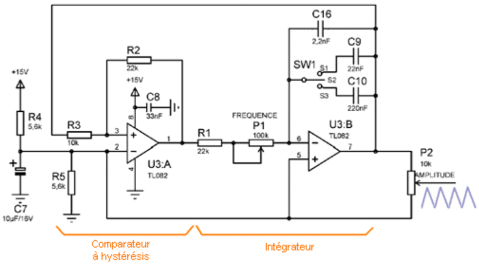
$$t \mapsto \varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } 0 < t < 1/2 \\ -\mathrm{E} & \text{si } 1/2 < t < 1 \end{cases}$$

3 - 28 Signal triangulaire

1. *Soit T la fonction **paire**, de période 1, et qui vérifie $\mathrm{T}(x) = \mathrm{E} - 2\mathrm{E}x$ pour tout $x \in [0\,;1/2[$. Représentez graphiquement cette fonction et déterminez l'expression de cette fonction pour $x \in]-1/2\,;0]$*
2. *On considère la fonction Λ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Lambda\ :\ t \mapsto t\mathrm{U}(t) - 2(t-1)\mathrm{U}(t-1) + (t-2)\mathrm{U}(t-2)$ où U est la fonction de Heavyside étudiée précédemment.*
   Représentez graphiquement cette fonction en distinguant les intervalles $]-\infty\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$ et $[2\,;+\infty[$.

3. *Donnez un nom à la fonction suivante d, de période 1, telle que $d(x) = \mathrm{E}x$ pour tout $x \in [0\,;1[$.*

Rien de plus simple qu'un signal triangulaire… et pourtant, voici le circuit le produisant :



3 - 29 Fonctions causales

Les fonctions causales sont très utilisées en électricité. Il s'agit tout simplement de fonctions nulles sur $]-\infty\,;0]$. Pour les exprimer, on utilise la fonction de Heaviside qu'on multiplie par des fonctions usuelles. Représentez graphiquement les fonctions suivantes

1. $f_1 \,:\, x \mapsto \mathrm{U}(x)\sin x$
2. $f_2 \,:\, x \mapsto \mathrm{U}(x)\sin(x-\pi)$
3. $f_3 \,:\, x \mapsto \mathrm{U}(x-\pi)\sin x$
4. $f_4 \,:\, x \mapsto \mathrm{U}(x-\pi)\sin(x-\pi)$

Aparté

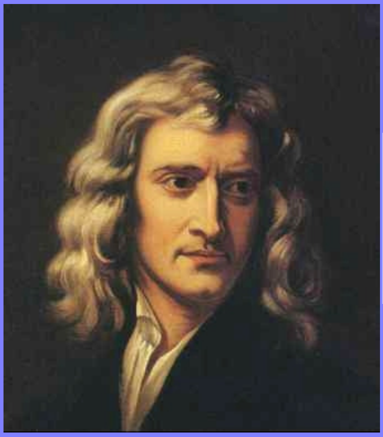
Oliver Heaviside

Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) était un physicien britannique autodidacte.
Bien qu'il eût de bons résultats scolaires, il quitta l'école à l'âge de seize ans et devint opérateur de télégraphe. Cependant il a continué à étudier et, en 1872, alors qu'il travaillait comme chef opérateur à Newcastle-upon-Tyne, il commença à publier ses résultats de recherche en électricité. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.
Entre 1880 et 1887 il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires ce qui lui valu beaucoup de controverse lorsqu'il l'introduisit pour la première fois, du fait d'un manque de rigueur dans l'utilisation de la dérivation. En 1887, il suggéra que des bobines d'induction devraient être ajoutées au câble du téléphone transatlantique afin de corriger la distorsion dont il souffrait. Pour les raisons politiques, cela n'a pas été fait.
En 1902 il prédit l'existence de couches conductrices pour les ondes radio qui leur permettent de suivre la courbure de la terre ; ces couches, situées dans l'ionosphère, sont appelées couches de Kennelly-Heaviside, du nom de Arthur Kennelly, physicien américain qui eut la même intuition que lui. Elles ont finalement été détectées en 1925 par Edward Appleton.
Il a développé aussi la fonction de Heaviside (aussi appelée échelon ou marche), utilisée communément dans l'étude de systèmes en automatique et il a étudié la propagation des courants électriques dans les conducteurs.
Des années plus tard son comportement devint, comment dire...,très excentrique : bref, il perdit un peu la boule, comme souvent chez les physiciens.

CHAPITRE

4

DÉRIVATION



Après avoir exploré la dérivation de manière intuitive et découvert la notion de limite et son formalisme né au XIX^{e} siècle, notre héros va pouvoir reprendre la notion de dérivée de manière plus rigoureuse...

1 POURQUOI DÉRIVER ?

1 1 L'Anglais et le Continent ou la bataille de la tangente

Mathémator : Vous vous rappelez que la notion de dérivée échauffa tant d'esprits qu'elle faillit déclencher une guerre. Replaçons-nous dans le contexte : nous sommes au XVIIe siècle, Descartes, Pascal, Fermat, Huygens et d'autres tournent autour de la notion de tangente à une courbe et sentent que ce problème pourrait déboucher sur un bouleversement complet de la science.

Téhessin : Quelle tension ! Vite, la suite !

Mathémator : Inspirés par ces aînés, Leibniz l'Allemand et Newton l'Anglais vont publier indépendamment l'un de l'autre [a] deux présentations de la dérivée d'une fonction et de son lien avec la tangente à une courbe. Pas entièrement rigoureux car ils utilisent la notion de limite un peu empiriquement sans la démontrer [b], leurs travaux constituent la base de la notion de calcul infinitésimal que vous étudiez au lycée. Qui fut le premier ? Quelle théorie est la meilleure ? Coups bas, insultes ont fusé de part et d'autre de la Mer du Nord pour répondre à ces questions.

1 2 Newton et la vitesse

Mathémator : Mon petit Téhessin, pressé d'aller résoudre quelques exercices de maths, vous roulez un peu trop vite avec votre 309 custom et vous vous faites contrôler à 145 km/h rue du Château : s'agit-il d'une vitesse moyenne ou d'une vitesse instantanée ?

Téhessin : Ben instantanée : c'est la vitesse qu'avait la voiture au moment où le flash s'est déclenché.

Mathémator : Mouais. Parlons d'abord de la vitesse moyenne : pour un mouvement rectiligne, c'est le rapport entre la différence des abscisses et le temps mis pour la parcourir

$$\mathrm{V}_{moy} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Téhessin : Pour la vitesse instantanée, il suffit de prendre un intervalle de temps Δt extrêmement petit : malgré la puissance du moteur de ma 309, sa vitesse ne changera pas beaucoup en, disons, une milliseconde.

Mathémator : Je vous l'accorde, mais vous raisonnez comme un scientifique du XVIIe siècle, ou comme un physicien. Vous dites

$$\mathrm{V}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{t+\Delta t-t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

pour Δt suffisamment petit. Mais depuis, les mathématiciens ont défini rigoureusement la notion de limite et ils préfèrent dire

$$\mathrm{V}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

Téhessin (à part) : *Ouais, bon, c'est pareil*

a. Vous savez, il était un temps où les hommes n'avaient pas l'ADSL
b. Il faudra encore attendre deux siècles

Mathémator : Je vous sens dubitatif, mais qu'est-ce que veut dire « petit » ? Avez-vous une définition valable ? Une milliseconde, c'est peu pour nous, mais c'est énorme pour un quark qui peut avoir une vie de $10^{-24}s$... En mathématiques, nous préférons la notion «d'aussi petit que l'on veut » qui est plus rigoureuse.

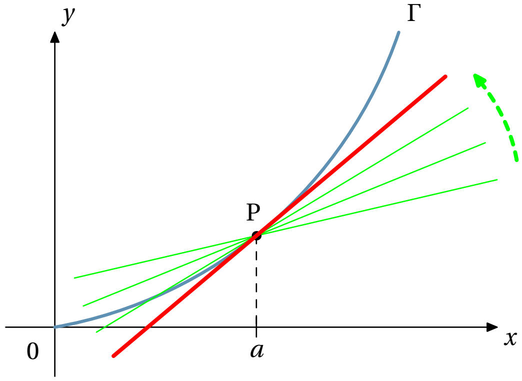
1 3 Leibniz et la tangente

Mathémator : Comme je vous le disais, le problème de la tangente intriguait les mathématiciens du XVIIe . Fermat avait résolu le problème de la « touchante » comme à son habitude, sur un cas particulier, de manière algébrique et au prix de pas mal de ce qui nous apparaît comme des tours de passe passe (je divise par h et ensuite je suppose que $h = 0$ mais ce genre de magouilles hante les traités actuels de mathématiques financières...). Leibniz a eu le mérite d'introduire des notations et des formulations claires.

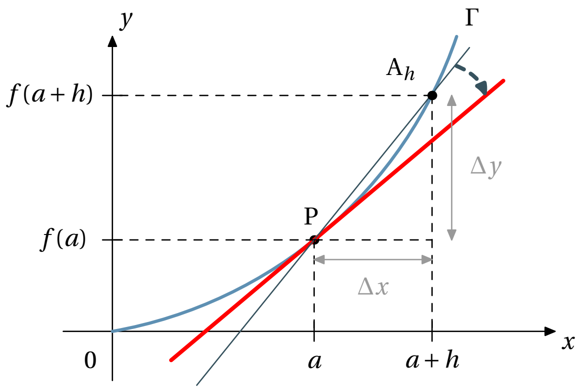
Téhessin : Mais qu'est-ce qu'une tangente ? On l'avait définie l'année dernière à l'aide des dérivées.

Mathémator : Une tangente, ou une « touchante » comme disait Fermat, était définie au XVIIe comme une « droite limite » qui ne « toucherait » la courbe localement qu'en un seul point [c].

Téhessin : Je me souviens : on fait tourner des droites autour d'un point



Mathémator : Voilà, mais il faut être un peu plus précis pour comprendre l'intuition de Leibniz (et d'autres)



La pente de la droite (AM_h) vaut

c. Aujourd'hui, la notion de tangente n'est plus uniquement liée à une droite, mais se définit à partir d'une limite

$$p_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{M_h} - y_A}{x_{M_h} - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

L'idée est alors que plus h sera petit, plus la droite (AM_h) se rapprochera de la tangente, et plus p_h se rapprochera de la pente de la tangente.
Pour nous, grands mathématiciens du XXI^e siècle, il suffit donc de faire tendre h vers 0 et de prendre la limite de p_h, si elle existe.

$$p = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1 4 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction en un point ?

Mathémator : Les deux problèmes que nous venons de voir, ceux de la vitesse instantanée et de la tangente, vous ont convaincu, j'espère, de l'importance fondamentale en mathématiques et en physique de la limite du taux d'accroissement d'une fonction. Il fallait absolument lui donner un nom et rendre la notion rigoureuse car nous avions été bloqués au moment d'étudier les dérivées intuitivement dans le chapitre 2.

Définition 4 - 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un élément I.
On dit que **f est dérivable en a** lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée **dérivée de f en a**, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

ou encore

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ainsi, la vitesse instantanée $V(t)$ n'est autre que $x'(t)$, la dérivée en t de la fonction position x. Et la pente de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

Aparté

D'où vient la notation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$?

En physique, vous employez plus volontiers la notation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ alors qu'en mathématiques, nous privilégions la notation $y'(x)$.
D'une part, l'une est due à Leibniz, l'autre à Lagrange. D'autre part, la première est liée à la figure précédente : la pente de la tangente ressemble à $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand ces grandeurs deviennent infiniment petites. Devenu infiniment petit, le Δ devient d et la pente devient donc $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. C'est une vision intuitive, qui « marche » pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais trop restrictive pour le mathématicien qui est amené à travailler avec des fonctions vectorielles dans des espaces de dimension quelconque (!). Pour le mathématicien, $\mathrm{d}y$ est alors une fonction de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des fonctions linéaires de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée, et le $\mathrm{d}y$ du physicien sera plutôt $\mathrm{d}y_x(h)$, if you see what I mean...

1 5 Comment calculer la dérivée d'une fonction en a ?

Téhessin : Ben vous venez de le dire, avec un calcul de limite.

Mathémator : Ah bé dame, c'est sûr. Y a plus qu'à s'y mettre. Considérez la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Calculez $f'(a)$ pour tout réel a.

Téhessin : Et bien

$$p_h = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

En développant $(a+h)^2$, on a

$$p_h = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$$

et on en déduit que la dérivée de f existe pour tout réel a et vaut

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} p_h = 2a$$

Incroyable ! On retrouve la formule.

Mathémator : On peut même s'occuper de la fonction inverse, de la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée : je vous laisse vous en occuper à titre d'exercice...

1 6 Une fonction continue en a est-elle dérivable en a et vice versa ?

Mathémator : Les travaux de Newton, Leibniz & Co utilisaient des fonctions qui étaient implicitement continues, mais on peut se demander si une fonction dérivable en a est forcément continue en a et ziozerouairaounede.

Téhessin : Je sens comme eux que si la fonction n'est pas continue en a, on va avoir du mal à tracer une tangente. Je suppose que vous voulez un contre-exemple...disons, la fonction signe

$$\text{signe}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0, et le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0, \\ -1/x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'a pas de limite ni à gauche, ni à droite de zéro.

Mathémator : Il semblerait donc que si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a. Ce qui reviendrait à dire avec un brin de logique [d] que la dérivabilité en a entraîne la continuité en a.

Supposons donc que f soit dérivable en a, alors $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie qu'on note $f'(a)$. Pour prouver que f est continue en a, il faut prouver que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Nous connaissons $\tau_a(x)$, nous cherchons $f(x)$, nous allons donc exprimer $f(x)$ en fonction de $\tau_a(x)$.

d. Il revient au même de dire « A implique B » et « contraire de B implique contraire de A ». À méditer...

On obtient, pour tout $x \neq a$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\tau_a(x)$$

Or $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\tau_a(x) = 0$ par produit et finalement, par somme des limites on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Propriété 4 - 1

Continuité des fonctions dérivables
Toute fonction dérivable en a est continue en a

Maintenant, que pensez-vous de la réciproque ?

Téhessin : Est-ce qu'une fonction continue en a est dérivable en a ? Je pense que non, sinon il ne servait à rien d'inventer la dérivabilité.

Mathémator : Je vais vous proposer un contre exemple qui répondra aussi à la question suivante :

1 7 Comment interpréter graphiquement la non-dérivabilité de f en a ?

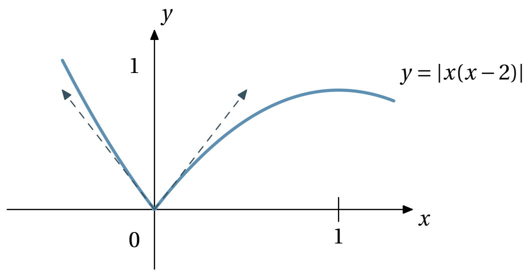
Mathémator : Comme pour la continuité, la dérivabilité est liée à l'existence d'une limite. Trois cas sont donc à étudier.

1 7 a Le taux de variation admet une limite à gauche et une limite à droite distinctes

Mathémator : Voici une fonction qui illustre notre propos et qui sert en même temps de contre-exemple à la question du paragraphe précédent

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x(x-2)| \end{array}$$

et observons la configuration en aile de mouette :



Étudiez la dérivabilité de f en 0.

Téhessin : Il suffit d'étudier le taux de variation

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x(x-2)|}{x} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x>0 \\ 2-x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

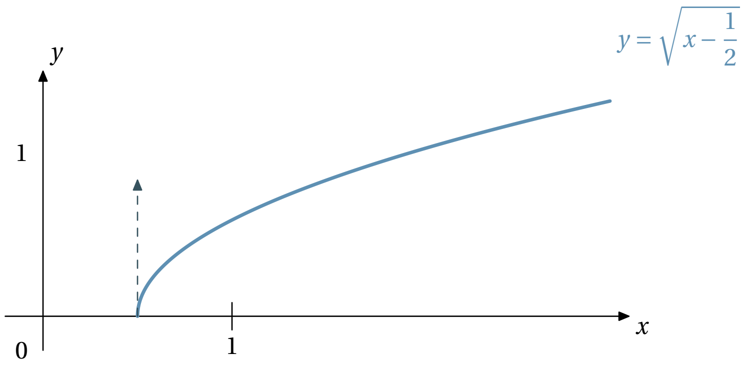
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tau_0(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tau_0(x) = 2$: le taux de variation n'admet pas de limite en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

Mathémator : C'est parfait ! Mais le fait que des limites existent à gauche et à droite nous permet de dire que f admet **une dérivée à gauche et une dérivée à droite** en 0. Ces dérivées sont les pentes des **demi-tangentes** en 0.

1 7 b Le taux de variation admet une limite infinie en a

Mathémator : Cette fois-ci, étudions la fonction bien connue

$$f : \begin{array}{rcl} \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x-\frac{1}{2}} \end{array}$$



Téhessin : J'étudie le taux de variation en 1/2

$$\tau_{1/2} = \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \frac{\sqrt{x-1/2}}{x-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x-1/2}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1/2} \tau_{1/2}(x) = +\infty$ et là encore la fonction n'est pas dérivable en 1/2.

Mathémator : C'est du bon boulot. J'ajouterai juste que dans ce cas, la courbe admet au point d'abscisse 1/2 une tangente verticale : la pente tend en effet vers l'infini.

1 7 c La taux de variation n'admet pas de limite en a

Mathémator : Pour ce cas plus pathologique, nous n'avons pas de contre-exemple à notre portée : il faudrait trouver une fonction continue en a mais dont le taux n'admette pas de limite en a. Mais ces fonctions existent. Vous montrerez même peut-être un jour que « la plupart » des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne sont dérivables nulle part, mais ceci est une autre histoire...

Propriété 4 - 2

Limite du taux de variation et tangente

Pour résumer, en appelant $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

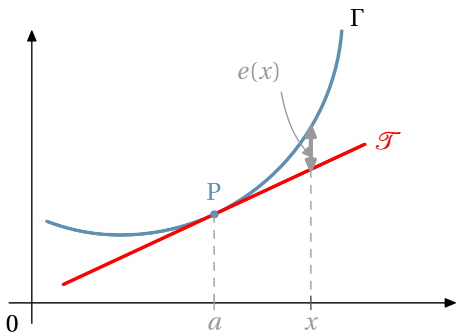
- si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \ell$, $\mathcal{C}_f$ admet la droite de pente ℓ avec ℓ fini et passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$ comme tangente au point d'abscisse a. Une équation de la tangente est donc

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

- si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \tau_a(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \tau_a(x)$, $\mathcal{C}_f$ admet deux demi-tangentes de pentes les limites à gauche et à droite de $\tau_a(x)$ au point d'adscisse a ;
- si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = \infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a

1 8 L'idée fondamentale du calcul différentiel : l'approximation locale des fonctions par des fonctions affines

Mathémator : À l'aide du dessin ci-dessous, essayons d'estimer l'erreur faite en remplaçant $\mathcal{C}_f$ par $\mathcal{T}$ localement au voisinage de a



Pour un x donné, l'erreur vaut

$$e(x) = f(x) - \big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)$$

puisque vous connaissez une équation de la tangente $\mathcal{T}$.
Maintenant, abordons une notion que Leibniz n'avait pas su rigoureusement traiter. On « sent » que plus x va se rapprocher de a, plus $e(x)$ sera « petit », mais comment définir ce terme ? Vous vous doutez qu'une fourmi est « petite » par rapport au système solaire mais « grande » par rapport à un quark, donc la notion de $e(x)$ devient petit ne peut nous satisfaire. Alors observons.
En ré-écrivant la relation, on obtient

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{constante}} + \underbrace{(x-a)f'(a)}_{\text{de l'ordre de } x-a} + e(x)$$

Il faudrait donc connaître l'ordre de $e(x)$ par rapport à $(x-a)$. Pour cela on étudie leur rapport

$$\lim_{x\to a} \frac{e(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right) = 0$$

d'après la définition de $f'(a)$ puisqu'on suppose que f est dérivable en a. Donc l'erreur $e(x)$ est « petite » ou « négligeable » devant $x-a$. On peut alors écrire

Propriété 4 - 3

Approximation locale d'une courbe par sa tangente
Au voisinage de d'un nombre a où f est dérivable,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)e(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} e(x) = 0$$

On pourra retenir une formulation mnémotechnique mais peu rigoureuse

$$f(x) \underset{a}{\approx} f(a) + (x-a)f'(a)$$

On peut donc localement approcher une fonction dérivable par une fonction affine, ce qui peut pas mal nous simplifier la vie pour étudier son comportement ou la modéliser.

Considérons par exemple la fonction $f : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ et étudions la au voisinage de 0. On obtient facilement $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1/2$, donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + xe(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Vérifions par le calcul

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+1/1000} & \approx & 1,000499875 \\ 1+1/2000 & = & 1,0005 \end{array}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de $1,251010^{-7}$, c'est à dire vraiment négligeable devant x qui vaut 10^{-3}.

Cette propriété inspira Euler qui s'en servi pour obtenir un tracé approximatif de solutions d'équations différentielles comme nous le verrons bientôt.

2 DÉRIVÉE ET VARIATIONS DES FONCTIONS

2 1 Qu'est-ce qu'une fonction dérivable sur un intervalle ?

Mathémator : C'est bien sûr une fonction qui est dérivable en chacun des points de l'intervalle. On peut alors associer à f une fonction dérivée, qu'on note habituellement f', et qui à chaque x de I associe le nombre dérivée de f en x.
On a bien sûr les mêmes théorèmes généraux sur les combinaisons de fonctions dérivables que pour les fonctions continues, car c'est encore un problème de limites.

2 2 Quel est le signe de la dérivée d'une fonction croissante sur une partie de R ?

Mathémator : Je vous rappelle la définition d'une fonction croissante sur une partie D

Définition 4 - 2

Fonction croissante sur une partie D
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **croissante** lorsque

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Il est facile de voir que c'est équivalent à

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0,$$

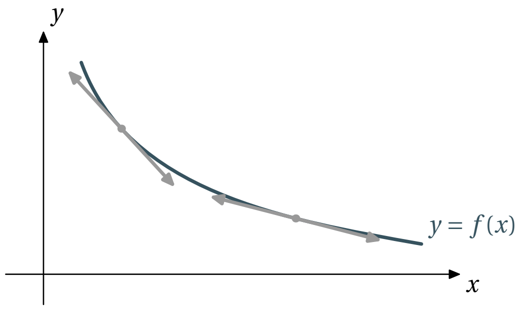
ou encore au fait que tous les taux d'accroissements sont positifs ou nuls.
Donc, par un simple passage à la limite, on en déduit que si f est croissante et dérivable, alors f' est positive. Et de même, si f est décroissante et dérivable, alors f' est négative.

2 3 Une fonction dont la dérivée est négative est-elle décroissante ?

Téhessin : C'est ce qu'on vient de dire !

Mathémator : Attention brave Téhessin ! Nous venons de montrer qu'une fonction croissante sur D a une dérivée positive sur D. Le problème qui nous occupe maintenant est la réciproque.

Téhessin : Ben c'est pareil : si par exemple, f est dérivable et f' toujours négative, alors les tangentes au graphe de f ont toutes une pente négative. On doit pouvoir en déduire que f est décroissante.



Mathémator : Ça peut être bon, mais vous oubliez un détail : il va falloir regarder l'ensemble D sur lequel on travaille de plus près. Par exemple, la fonction inverse $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ a une dérivée $-1/x^2$ toujours négative mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} > 0$

Téhessin : C'est encore une histoire d'intervalle...

Mathémator : Effectivement ! Une nouvelle fois, retenez bien qu'il est extrêmement important de savoir sur quel ensemble on travaille : pour une même fonction, une propriété vraie sur un ensemble peut être fausse sur un autre.
Pour le cas qui nous intéresse, il nous est impossible à notre niveau de prouver que sur un intervalle notre proposition devient vraie. Nous l'admettrons donc.

Téhessin (à part) : *Ça fait toujours une question de cours en moins...*

Mathémator : Et comme une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante, on en déduit que f est constante si et seulement si $f' = 0$. On peut donc énoncer ce théorème fondamental.

Théorème 4 - 1

Sens de variation et signe de la dérivée
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors

- f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
- f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.
- f est constante si et seulement si $f' = 0$.

2 4 Comment montrer qu'une fonction est strictement croissante ?

Téhessin : D'après ce que vous m'avez dit, il faudra s'intéresser au cas où la fonction est dérivable sur un intervalle I. Maintenant, je suppose qu'il faut que la dérivée soit strictement positive.

Mathémator : Ici encore, faites attention aux mots que vous employez. D'abord, rappelons la définition

Définition 4 - 3

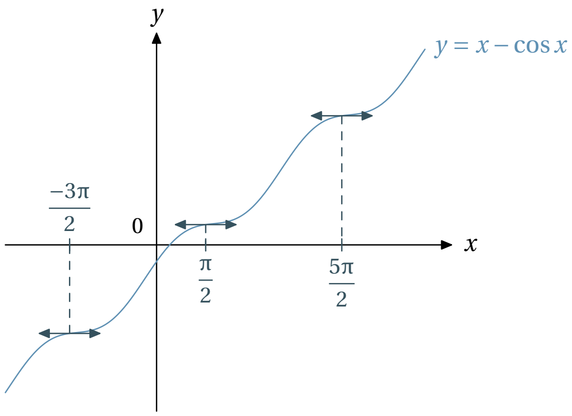
Fonction strictement croissante sur une partie D
Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **strictement croissante** lorsque

$$\text{pour tout couple } (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

On comprend bien qu'il SUFFIT que la dérivée soit strictement positive pour que ça marche. Mais ce n'est pas NÉCESSAIRE. Considérez en effet la fonction cube qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Téhessin : Bon, ben je propose : f positive, ne s'annulant qu'en un nombre fini de points.

Mathémator : C'est suffisant mais ce n'est toujours pas nécessaire comme on le voit sur le dessin suivant



Téhessin : Pffff...Ouais, bon, allez-y, étalez votre science.

Mathémator : Ne le prenez pas mal ! Voici le résultat

Théorème 4 - 2

Fonction strictement croissante sur un intervalle
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I vers $\mathbb{R}$. Alors f est strictement croissante équivaut à : f' est positive ou nulle et il n'existe pas de segment $[a,b]$ de I avec $a < b$ tel que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

En effet, si f est strictement croissante, alors elle est croissante et donc f' est positive, et d'autre part, f' ne peut pas être nulle en tous les points d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$ car sinon, f serait constante sur $[a,b]$.

Réciproquement, supposons les conditions sur f' vérifiées et montrons que f est strictement croissante. On se donne deux éléments x et y de I tels que $x < y$. Alors d'une part $f(x) \leqslant f(y)$ car f est croissante puisque $f' \geqslant 0$. Et d'autre part, l'égalité $f(x) = f(y)$ entraînerait que f est constante sur $[x,y]$ compte tenu de la croissance de f, ce qui ne serait possible que si f' était nulle sur $[x,y]$.

2 5 À quoi sert la stricte monotonie d'une fonction ?

Mathémator : Rappelez-vous du théorème de la solution unique qu'on appelle aussi théorème de la bijection. Pour l'utiliser, il faut être sûr que notre fonction est strictement monotone. Il faut donc pouvoir le vérifier.
Au Bac, il suffira de vérifier sur notre tableau de variation que la « flèche » ne change pas de direction.

Aparté

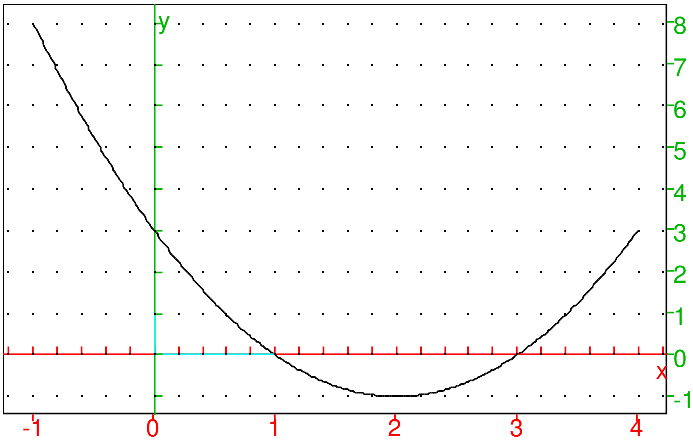
Pour les curieux : qu'est-ce qu'une bijection ?
On appelle bijection une application de I sur J telle que tout élément de I admette une image et une seule dans J et que tout élément de J admette un antécédent et un seul dans I. La première partie renvoie à une fonction, la deuxième au théorème de la solution unique.

Quand tout l'ensemble d'arrivée est décrit par les images (quand f(I)=J), on dit que f est *surjective*.
Quand un élément de l'ensemble d'arrivée n'admet qu'un antécédent dans l'ensemble de départ, on dit que f est *injective*. On le vérifie en montrant que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

2 6 Que dire de la dérivée en un extremum local ?

Intuitivement, si une fonction f dérivable sur un intervalle admet sur cet intervalle un minimum en x_0, la fonction va décroître vers $f(x_0)$ puis croître ensuite et donc il semble que $f'(x_0)$ va être nul.
Observons quelques cas avec XCAS :

```
graphe((x-2)^2-1,x=-1..4)
```

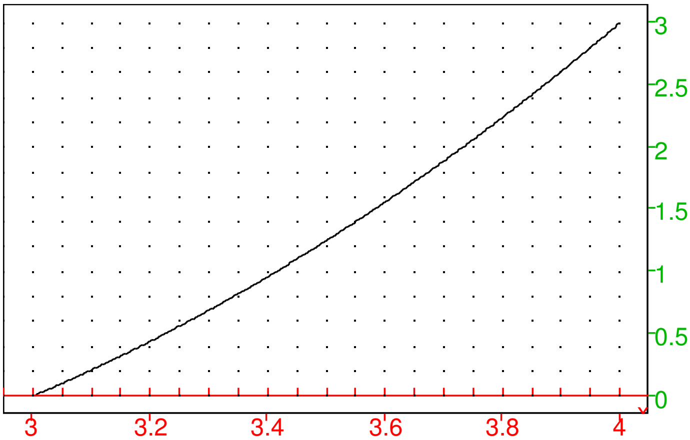



```
resoudre(derive((x-2)^2-1)=0,x)
```

[2]

Cela semble fonctionner. Mais observons ceci :

```
graphe((x-2)^2-1,x=3..4)
```



Le minimum est atteint en 3 car f est strictement croissante sur $[3,4]$ et pourtant $f'(3) \neq 0$.
Il faut donc distinguer le cas où x_0 est une extrémité de l'intervalle des autres cas.
Supposons donc que x_0 soit un point intérieur à un intervalle I, que f soit dérivable en x_0 et que, par exemple, f admette un minimum local en x_0.
Cela veut dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset \mathrm{I}$ et

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est donc négatif sur $[x_O - \alpha, x_0]$ et positif sur $[x_O, x_0 + \alpha]$.
Il en est donc de même de ses limites à gauche et à droite en x_0. Or la fonction f étant dérivable en x_0, ces deux limites sont égales à $f'(x_0)$ et donc on a $f'(x_0) \leqslant 0$ et $f'(x_0) \geqslant 0$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$.

Théorème 4 - 3

extremum
Soit I un intervalle ; soit x_0 un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I.
Soit f une fonction définie sur I et dérivable en x_0.
SI f admet un extremum local en x_0, ALORS $f'(x_0) = 0$.

2 7 Dérivée de fonctions composées

Mathémator : Comment dériver la fonction $h\ :\ x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$?

Téhessin : ? ? ? ? Cela dépasse mes capacités !

Mathémator : Ne soyez pas si modeste. Considérons une fonction g dérivable en x_0 et une fonction f dérivable en $g(x_0)$ qu'on notera $g(x_0) = y_0$.
Introduisons maintenant la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(u) = \frac{f(u)-f(y_0)}{u-y_0} & \text{si } u \neq y_0 \\ \varphi(y_0) = f'(y_0) & \end{cases}$$

Que pensez-vous de la continuité de φ en y_0 ?

Téhessin : Comme f est dérivable en y_0, alors

$$\lim_{u \to y_0} \frac{f(u) - f(y_0)}{u - y_0} = f'(y_0)$$

ce qui assure que $\lim\limits_{u \to y_0} \varphi(u) = \varphi(y_0)$ et donc la continuité de f en y_0.

Mathémator : Parfait ! L'avantage de cette fonction est que, pour tout $x \neq x_0$:

$$\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \varphi(g(x))\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

On peut prendre la limite du membre de droite en x_0 car φ est continue en $g(x_0)$ et que f est dérivable en x_0.
On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 4 - 4

Dérivée d'une composée
Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x_0 et

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)$$

Appliquez cette formule à notre exemple.

Téhessin : Ici, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Avec $f(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{X}}$ et $g(x) = 1 + x^2$, on obtient $f'(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}}2x$$

Mathémator : En fait, on dérive comme si $g(x)$ était une variable et on multiplie par la dérivée de « l'intérieur ».
On obtient comme ça tout un tas de formules rappelées dans le tableau de fin de chapitre.

Danger

On aurait pu être tenté de dire :
Si g est constante au voisinage de x_0, la dérivée de la composée est toute trouvée.
Sinon, par composition des limites, le taux

$$\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} = \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

tend vers une limite finie quand x tend vers x_0
Finalement $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)$, d'où le théorème.
Cependant, même si g n'est pas constante au voisinage de x_0, le graphe de g peut couper l'axe $y = y_0$ une infinité de fois comme par exemple avec la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.

2 8 Peut-on étudier les variations d'une fonction sans calculer sa dérivée ?

Mathémator : Grâce au théorème précédent, je réponds oui à la question précédente. En effet, si f et g sont dérivables là où il faut, $(f \circ g)'$ sera du signe du produit des dérivées de f et g. Donc

Théorème 4 - 5

Sens de variation d'une composée
Si g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(\mathrm{I})$, alors

- La composée de deux fonctions croissantes est croissante ;
- La composée de deux fonctions décroissante est croissante ;
- la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Téhessin : C'est comme la règle des signes !

Mathémator : Bien sûr puisque ça en découle !
Par exemple, pour la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc comme la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$ est croissante, f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a juste utilisé que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, et que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

.

EXERCICES

4 - 1 Une preuve de la divergence de certaines suites géométriques

1. *Montrez que, pour tout réel positif x et tout entier naturel non nul n, on a*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Joker : déterminez le signe de $(1+x)^n - 1 - nx$ en étudiant une fonction.

2. *Que peut-on en déduire concernant les suites géométriques ?*

4 - 2 Étude d'une fonction irrationnelle avec problème de dérivabilité en un point.

Étudiez et représentez graphiquement la fonction

$$f\ :\ x \longrightarrow \frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$$

Joker : pour la dérivabilité en 5, utilisez la limite du taux d'accroissement.

4 - 3 Étude d'une fonction trigonométrique.

Étudiez et représentez graphiquement la fonction

$$f\ :\ x \longrightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Joker : commencez par régler les problèmes de définition, de périodicité et de parité.

4 - 4 Dans l'esprit du Bac...

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. *On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.*
   a. *Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.* Joker : emploi classique du théorème de la bijection.
   b. *Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.*
2. a. *Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.*
   b. *Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.*
3. a. *Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que*

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

   b. *Déduisez en que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ.*
   Vérifiez en particulier que $(\mathcal{C})$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. *Déterminez les abscisses des point B et B′ de $(\mathcal{C})$ admettant une tangente parallèle à Δ.* Joker : deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
5. a. *Vérifiez que $f(\alpha) = 3\alpha/2$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$.* Joker : utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.
   b. *Tracez Δ, $(\mathcal{C})$ ainsi que les points A, B, B′ et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et −1, sans oublier les six tangentes en ces points.*

4 - 5 ROC : dérivée d'une composée

1. ***Restitution organisée de connaissances***
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
   – *P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.*
   – *Q : Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.*
2. *On désigne par g la fonction définie sur $]-1\,;\,1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\,;\,1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.*
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\,;\,0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.
   a. *Démontrer que pour tout x de $]-\pi\,;\,0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.*
   b. *Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.*

4 - 6 Bac suisse

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3 - 1}.$$

1. *Étudier la fonction f. Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :*

$$f''(x) = \frac{12x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$$

2. *Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion (le point d'abscisse x tel que $f''(x) = 0$).*
3. *Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).*

4 - 7 Bac espagnol

Sea f la función definida para $x \neq -2$ por

$$\frac{x^2}{x+2}$$

1. *Halla las asintotas de la gráfica de f.*
2. *Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales de f.*
3. *Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.*

4 - 8 Bac espagnol

Dada, la curva $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ se pide :

1. *Dominio de définición y corte a los ejes.*
2. *Simetrias.*
3. *Asintotas.*
4. *Posibles extremos de la función que define a la curva.*
5. *Con los anteriores datos obtener ura representación aproximada de la curva*

4 - 9 Bac anglais

1. *Find the coordinates of the turning points on the curve whose equation is $y = x^3 - 9x^2 + 24x$*
2. *The function f is given by :*

$$f(x) = x + \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$$

   Find the range of values of x for which f is an increasing function of x.
3. *Differentiate with respect to x $4\sin^3(2x)$.*
4. *The curve $\mathcal{C}$ has equation $y = \frac{2x}{1+x^2}$. Find the coordinates of the stationary points and distinguish betwendenumerate them.*

4 - 10 Bac polonais

Zbadaj monotoniczność i ekstrema następujących funkcji $y = \frac{x}{x^2-5x+4}$.

4 - 11 Résolution analytique d'un problème géométrique. Extremum d'une fonction.

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A. On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{\text{HOC}}$. On suppose enfin que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

1. **a.** *Exprimez* BC *et* AH *en fonction de α.* Joker : sinopphyp cosadjhyp

   b. *En déduire, en fonction de α, l'aire du triangle* ABC.
2. *On considère la fonction f définie sur $[0, \pi/2]$ par*

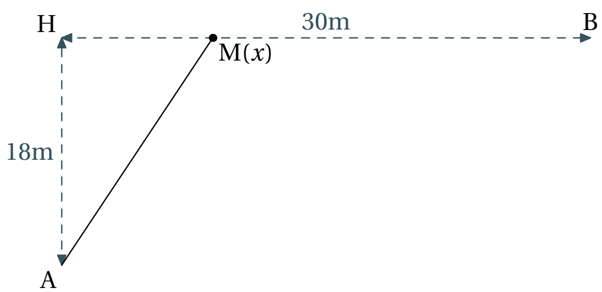
$$f(\alpha) = \sin\alpha(1 + \cos\alpha)$$

   Calculez la dérivée f' de f et prouvez que, pour tout réel α de $[0, \pi/2]$, on a $f'(\alpha) = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1$
3. **a.** *Factorisez le polynôme $2X^2 + X - 1$ et en déduire une factorisation de $f'(\alpha)$.*

   b. *Dressez alors le tableau de variations de f.*
4. *Démontrez qu'il existe une valeur de α, que vous déterminerez, pour laquelle l'aire du triangle* ABC *est maximale. Précisez ce maximum. Quelle est alors la nature du triangle* ABC *?*

4 - 12 Problème d'optimisation : les dents de la mer XXXII

Albert est un fervent adepte de la plongée sous-marine. Alors qu'il se trouve en A et s'émerveille devant la beauté du paysage aquatique, il aperçoit au loin un requin d'une taille qui le dissuade de poursuivre plus avant son exploration des fonds marins et décide de rejoindre son bateau situé en B. À quel endroit doit-il rejoindre la surface pour que le temps de parcours soit minimal ?



Grâce à l'adrénaline secrétée par la portion médullaire de ses glandes surrénales, Albert se déplace à la vitesse de $7{,}2\,km.h^{-1}$ sous l'eau et à la vitesse de $9\,km.h^{-1}$ en surface. On supposera que la surface de l'eau est rectiligne, que la dérive due au courant est nulle et que la trajectoire d'Albert est une ligne brisée.

4 - 13 Une fonction avec valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x - 5|}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. *Écrivez $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.*
2. *Montrez que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie. Que peut-on en déduire sur le domaine d'étude de f.*
3. *Étudiez les variations de f là où elle est dérivable.*
4. *Étudiez la dérivabilité de f en 1. Interprétez graphiquement.*
5. *Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$. Interprétez graphiquement.*
6. *Tracez $\mathcal{C}_f$. Vous prendrez 1cm comme unité en abscisse et 2cm en ordonnées. Vous prendrez soin de tracer les tangentes remarquables.*

4 - 14 Équations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous en étudierons bientôt deux exemplaires en cours :

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Pour l'heure, nous allons nous contenter de rechercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

1. *Montrez que pour tout entier naturel n, $f(n) = nf(1)$*
2. *Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1) = pf(1/p)$.*
3. *Déduisez-en que pour tout rationnel r, $f(r) = rf(1)$*

PARTIE B

On suppose que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = a$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = a$.

1. *Calculez $f(0)$.*
2. *Montrez que g est continue en 0.*
3. *Montrez que $g(2x) = g(x)$ pour tout réel x.*
4. *Déduisez-en que $g(x) = g(x/2^n)$ pour tout réel x et tout entier naturel n.*
5. *Déduisez-en que g est une fonction constante.*
   Joker : où on utilise enfin un théorème oublié du cours sur la continuité
6. *Déduisez-en une expression de $f(x)$ pour tout réel x en fonction de a.*
7. *Réciproquement, vérifiez que les fonctions trouvées à la question 5) sont solutions du problème. Concluez. Comparez avec les résultats de la partie A.*

4 - 15 Paramètres

On munit le plan d'un repère orthonormé.

1. *Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par*

   $$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

   et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé.
   - **a.** *Étudiez les variations de f.*
   - **b.** *Démontrez que pour tout $x \in [0,1]$*

     $$(f \circ f)(x) = x$$

   - **c.** *Construisez la courbe $(\mathcal{C})$.*
2. *On considère les points A_k de coordonnées $(k+1/2, 0)$ et B_k de coordonnées $(0, 1/2-k)$ où k est un paramètre réel de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.*
   On note D_k la droite déterminée par les points A_k et B_k.
   - **a.** *Déterminez une équation de D_k sous la forme $a(k)x + b(k)y + c(k) = 0$ où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable k que l'on déterminera.*
   - **b.** *Soit D'_k la droite d'équation $a'(k)x + b'(k)y + c'(k) = 0$ où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.*
     Vérifiez que, pour toute valeur de k dans $[-1/2, 1/2]$, les droites D_k et D'_k sont sécantes en un point M_k.
     Démontrez que les coordonnées de M_k sont

     $$x_k = (1/2+k)^2 \qquad y_k = (1/2-k)^2$$

   - **c.** *Démontrez que, lorsque k décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, le point M_k décrit la courbe $(\mathcal{C})$.*

4 - 16 Décolage d'une fusée

Un cosmonaute projette d'observer deux étoiles voisines, Alpha et Bêta, mais pas trop près, car, en raison de leurs masses, elles exercent une force d'attraction très importante. Aussi, le cosmonaute doit-il disposer d'assez de carburant, i.e. d'énergie, pour pouvoir s'en éloigner à la fin de sa mission, sinon il resterait à jamais prisonnier d'une de ces étoiles.
La distance entre Alpha et Bêta est de cinq unités spatiales, leurs masses respectives sont de quatre et neuf unités de masse.
On repère Alpha par A, Bêta par B et un point M de la droite (AB) par son abscisse x dans le repère (A,I), I étant le point de $[AB]$ tel que AI mesure une unité spatiale.
On sait que pour tout point M de la droite (AB), l'énergie E (énergie potentielle de gravitation) nécessaire pour quitter cette position et s'éloigner à une grande distance est donnée par la formule

$$\mathrm{E}(x) = \frac{4}{|x|} + \frac{9}{|x-5|}$$

1. *Étudiez la fonction E sur $]0,5[$.*
2. *Démontrez que, sur l'intervalle $]0,5[$, la fonction E admet un minimum, que vous déterminerez*
   - *en utilisant les variations de E*
   - *par une méthode algébrique*

   Quelle conclusion peut en tirer le cosmonaute ?
3. *Déterminez les points du segment [AB] d'où le cosmonaute peut repartir s'il dispose de 10 unités d'énergie.*

4 - 17 Étude de x ↦ x+ sin x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f\ :\ x \mapsto x + \sin x$$

1. *La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?*
2. *Étudiez le sens de variation de f.*
3. *Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$. Interprétez graphiquement.*
4. *Montrez qu'on peut encadrer f par deux fonctions affines.*
5. *Calculez la limite de f en $+\infty$.*
6. *Étudiez les points d'intersection de la courbe avec les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives $y = x$, $y = x+1$ et $y = x-1$.*
7. *Montrez que si f admet la droite D d'équation $y = ax+b$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut a et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax$ existe et vaut b.*
8. *Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudiez le comportement de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$. Interprétez graphiquement.*
9. *Représentez graphiquement f sur $[0,3\pi]$ (1 unité $\mapsto$ 2cm en ordonnée et π unités $\mapsto$ 4cm en abscisse). Vous représenterez les droites d_1, d_2 et d_3, la tangente à l'origine, les tangentes horizontales.*

4 - 18 Limite et taux de variation

Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+32}-\sqrt{32}}{x}$ en utilisant un taux de variation. Proposez ensuite une autre méthode.

4 - 19 Vrai ou faux de concours

Répondez par VRAI ou FAUX aux propositions suivantes en justifiant brièvement.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f\ :\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

1. *f est impaire.*
2. *f est dérivable en 0.*
3. *La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.*

4 - 20 Fonction lipschitzienne

Montrez que la fonction sin est 1-lipschitzienne, c'est à dire qu'elle vérifie pour tous réels x et y

$$\left|\sin x - \sin y\right| \leqslant \left|x-y\right|$$

Joker : Montrez que $|\sin t| \leqslant |t|$ et utilisez une bonne formule trigo

4 - 21 Taux moyen de variation

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *Montrez que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ existe et est finie.*
2. *La réciproque est-elle vraie ?*

4 - 22 Problème de dérivabilité

La fonction $f\ : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?
Joker : $\cos(2x) - 1 = -2\sin^2(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)/x = 1$

4 - 23 Fonction dérivable de dérivée non continue

Montrez que la fonction suivante est dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée ne soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^2 \sin 1/x \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

4 - 24 Style Bac avec ROC

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I.

1. *Rappeler la définition de « f est dérivable en a ».*

2. *Dans chacun des cas suivants, indiquer si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté) ; dans le cas contraire, justifier la réponse.*

- f *est continue en a et f est dérivable en a ;*
- f *est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;*
- f *n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;*
- f *n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a.*

4 - 25 Être ou ne pas être un cercle

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Cette fonction est dérivable sur [0 ; 1] et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. **a.** *Montrer que le point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.*

b. *Montrer que Γ est symétrique par rapport à la droite dont une équation est $y = x$.*

2. **a.** *Si Γ était un arc de cercle, quel serait son centre ? Quel serait son rayon ?*

b. *La courbe Γ est-elle un arc de cercle ?*

4 - 26 Chimie : coefficient de dissociation

L'état d'équilibre de la réaction de dissociation de N_2O_4 peut être caractérisé par la valeur du coefficient de dissociation α. À la température de 27 ° C, ce coefficient est lié à la pression totale P par la relation :

$$\alpha^2 = \frac{1}{24\mathrm{P}+1}$$

1. *Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{24x+1}}$$

a. *Étudiez le sens de variation de f.*

b. *Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où 1cm représente 0,1 en abscisse et 2cm représentent 0,1 en ordonnée.*

Dans ce repère, tracez la courbe représentative de f.

c. *Montrez que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $[0;1]$. Résolvez cette équation.*

2. *Dans cette question, on identifie x à la pression totale P et $f(x)$ à α.*

a. *On considère que la dissociation de N_2O_4 est pratiquement totale si $\alpha = 0,99$. Déterminez la valeur de la pression correspondante.*

b. *De manière plus générale, exprimez P en fonction de α. Pourquoi définit-on ainsi une fonction ? Pouvait-on le prévoir ?*

c. *Dressez le tableau de variation de la fonction définie à la question précédente.*

4 - 27 Mouvement dans le champ de pesanteur

On lance un objet d'un point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ formant un angle α avec l'horizontale. On se place dans le plan formé par O, $\overrightarrow{v_0}$ et son projeté sur l'horizontale. On considère alors le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ où $\vec{\imath}$ dirige l'axe horizontal.
On note M la position de l'objet à un certain temps t et $\left(x;z\right)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ au temps t.
Par application de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\begin{cases} x = \left(v_0 \cos(\alpha)\right)t \\ z = -\frac{gt^2}{2} + \left(v_0 \sin(\alpha)\right)t \end{cases}$$

1. *Exprimez z uniquement en fonction de x, v_0 et α. On note alors f la fonction qui à x associe z.*

2. *Étudiez la fonction f et dressez son tableau de variation.*

3. *Étudiez la fonction qui à α associe l'altitude maximale de l'objet pour v_0 considéré comme fixe. Comment choisir α pour que l'objet atteigne la hauteur la plus grande possible ? Quel est l'inconvénient de cette méthode de tir ?*

4. *À v_0 fixé, comment choisir α pour tirer le plus loin possible ? Quelle est alors la hauteur maximale atteinte par l'objet ?*

5. *On suppose que $v_0 = 20m\cdot s^{-1}$. On souhaite que l'objet retombe sur le sol 20 mètres plus loin. Quel angle de tir doit-on choisir ?*

4 - 28 Théorème de Rolle

Ce théorème affirme que

> **Théorème de Rolle**
> *Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$*

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

1. *Faites un dessin résumant .... et démontrant la situation.*
2. *Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ est un intervalle d'après le TVI. Notons-le $[m,M]$.*
   a. *Si $m = M$, que peut-on en déduire ?*
   b. *Sinon, le maximum M par exemple est atteint pour un réel $e \in]a,b[$. Notons $\tau_e(x) = \dfrac{f(e+x)-f(e)}{x}$. Que pensez-vous de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tau_e(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tau_e(x)$?*
   c. *Étudiez le signe de $f'(e)$ et concluez.*

4 - 29 Théorème des acroissements finis

Voici l'énoncé

Théorème des accroissements finis
Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

Pour prouver ce théorème, faites une figure. On appellera A le point d'abscisse a, B le point d'abscisse b, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point du segment [AB] d'abscisse x. On note enfin $\varphi(x) = \overline{\mathrm{PM}} = y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{P}}$

1. *Exprimez $\varphi(x)$ en fonction de x.*
2. *Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$? Appliquez le et concluez.*

4 - 30 Application du TAF

1. *Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Démontrez que f est constante sur $[a,b]$.*
2. *Soit deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Démontrez qu'il existe un réel constant C tel que $f(x) = g(x)+\mathrm{C}$ pour tout $x \in [a,b]$.*

4 - 31 Tracer le graphe d'une fonction dont on connaît la dérivée

Une question surgit dans votre esprit en ébullition. On connaît des fonctions dont les dérivées sont :

- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto x^1$
- $x \mapsto x^0$
- $x \mapsto x^{-2}$
- $x \mapsto x^{-3}$

mais on ne connaît pas de fonction dont la dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$. En existe-t-il une ?

Pour le savoir, nous allons utiliser notre fameuse approximation affine[e]

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pour h « suffisamment petit »
Nous en déduisons que $f(x+h) \approx hf'(x) + f(x)$.
Commentez alors le programme suivant

```
der2fonc(d,a,b,yo,h):={
   x:=a;
   y:=yo;
   P:=point(x,y);
pour j de a jusque b pas h faire
     y:=h*d(x)+y; x:=x+h; P:=P,point(x,y);
fpour;
couleur(P,rouge);
}:;
```

Observons maintenant le graphe de la fonction f qui a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[0,1\,;15]$ avec $f(0,1) = -2,3$ et un pas de 0,05 :

```
der2fonc(x->1/x,0.1,15,-2.3,0.05)
```

Cette fonction semble donc exister ! Nous l'étudierons bientôt : c'est la fonction LOGARITHME NÉPÉRIEN.

4 - 32 Que fait ce programme ?

```
 gericault(f,a,p):={
d:=0;
h:=0.1;
tantque abs(D-d)>p faire
      D:=d;
      d:=(f(a+h)-f(a))/(h);
      h:=h/2;
ftantque;
return(d)
}:;
```

4 - 33 Cylindre inscrit dans une demi-sphère

Le but de l'exercice est de rechercher le volume maximal d'un cylindre inscrit dans une demi-sphère.
On considère un cylindre droit de hauteur h inscrit dans une demi-sphère de rayon R=1.
Le cylindre et la demi-sphère ont le même plan de base $\mathcal{P}$, le même axe de symétrie (Oy) ; La demi-sphère et le cylindre se coupent selon un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r.
Soit M un point de ce cercle $\mathcal{C}$ et H la projection orthogonale de M sur $\mathcal{P}$.

e. Voir théorème 4 - 3 page 109

On désigne par α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{HOM}}$.

1. *Montrez que le volume du cylindre s'exprime à l'aide de α par la fonction définie sur un intervalle I à déterminer par*

$$f(x) = \pi\left(\sin(x) - \sin^3(x)\right)$$

2. *Étudiez f sur I.*
3. *Montrez que f admet un maximum en α_0 tel que* $\sin(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. *Désuiez-en les dimensions du cylindre de plus grand volume inscrit dans la demi-sphère et calculez la valeur exacte de son volume.*

4 - 34 Filtre passe-bande

À l'aide d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C, on réalise un quadripôle.
Le signal d'entrée est une tension alternative V_1 *de pulsation x avec $x > 0$.*
La fonction de transfert en régime sinusoïdal est alors la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ *par :*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{iR}\left(\mathrm{C}x - \frac{1}{\mathrm{L}x}\right)}$$

avec $\mathrm{R} > 0$, $\mathrm{C} > 0$, $\mathrm{L} > 0$ *et i le nombre complexe de carré* -1.

1. *On note le gain du système* $\mathrm{H}(x)$ *: c'est le module de* $\mathrm{F}(x)$. *Calculez* $\mathrm{H}(x)$.
2. *Soit* U *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$\mathrm{U}(x) = 1 + \mathrm{R}^2\left(\mathrm{C}x - \frac{1}{\mathrm{L}x}\right)^2$$

   Étudiez U et en déduire les variations de H.

3. *Donnez l'allure de la représentation graphique de H.*
4. *On note x_0 la valeur de la pulsation pour laquelle H est maximum. On appelle alors pulsation de coupure à* -3*dB toute valeur de x telle que* $\mathrm{H}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{H}(x_0)$.
   Montrez graphiquement que le filtre présente deux pulsations de coupure x_1 et x_2 ($0 < x_1 < x_2$).
   Calculez x_1 et x_2.
5. *L'intervalle* $[x_1;x_2]$ *est appelé bande passante du filtre. Déterminez la longueur de la bande passante de ce filtre. Seules les fréquences situées dans cette bande passante sont transmises. C'est donc un filtre passe bande.*

CHAPITRE

5

LA FONCTION EXPONENTIELLE

1 ET L'HOMME CRÉA L'EXPONENTIELLE...

1 1 Une équation différentielle

On considère un circuit électrique comprenant une résistance r et une bobine d'inductance L. Soit $u(t)$ la tension aux bornes de la bobine et soit $i(t)$ le courant qui la parcourt. Vous avez vu ou vous allez bientôt voir en cours d'électricité que tout ce beau monde est lié par la relation

$$u(t) = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + r\,i(t)$$

qui peut vous sembler un peu obscure en ce début de mois d'octobre.
Tentons malgré tout une expérience, comme dans tout bon tépéheu. On suppose qu'au temps $t = 0$, on coupe la tension. Expérimentalement, on peut vérifier à l'aide d'un ampèremètre que

$$\Delta i(t) \approx -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)\,\Delta t$$

en considérant des intervalles de temps Δt assez petits.
Cela s'écrit encore

$$\frac{i(t+\Delta t) - i(t)}{\Delta t} = -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)$$

On reconnaît dans le membre de gauche le taux d'accroissement de la fonction i entre les temps t et $t + \Delta t$. En supposant que la fonction i est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on obtient donc, en faisant tendre Δt vers 0

$$i'(t) = -\frac{r}{\mathrm{L}}\,i(t)$$

Vous apprendrez bientôt qu'il s'agit d'un cas particulier de la première loi de Kirchhoff.
Il s'agit maintenant de déterminer $i(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

L'équation différentielle $f' = kf$ se retrouve dans de nombreux problèmes : désintégration des noyaux des atomes d'un corps radioactif, datation au carbone 14, évolution d'une population où la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Par exemple, certains phénomènes en mécanique conduisent à étudier l'équation différentielle $f'' = -f$. Nous connaissons au moins deux fonctions la satisfaisant : cosinus et sinus.
Le problème avec $f' = kf$, c'est que nous ne connaissons aucune fonction solution.

1 2 Construction approchée du graphe d'une solution par la méthode d'Euler

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = f(x)$.

1. Soit h un réel voisin de zéro. Montrez que, pour tout réel a, l'approximation affine donnée par le calcul des dérivées s'écrit

$$f(a+h) \approx (1+h)f(a)$$

2. On prend $h = 0,001$. On note (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + h$. Donnez une approximation de $f(a_{n+1})$ en fonction de $f(a_n)$.

Déduisez-en que la suite des approximations de $f(a_n)$ est une suite géométrique que vous caractériserez.

3. Faîtes de même avec $h = -0,001$.

4. Montrez que $f(1) \approx \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et calculez la valeur approchée correspondante de $f(1)$ pour $n = 10\,000$.

Utiliser un tableur n'est pas très constructif. Mieux vaut faire appel à un vrai logiciel de mathématiques !...
Voici un petit programme XCAS qui construit la courbe approchée par la méthode d'Euler, c'est-à-dire que l'on va tracer la courbe correspondant à la fonction vérifiant :

- $f' = f$;
- $f(xo) = yo$;
- f est définie sur $[xo\,;xfinal]$;
- On va faire des pas de h.

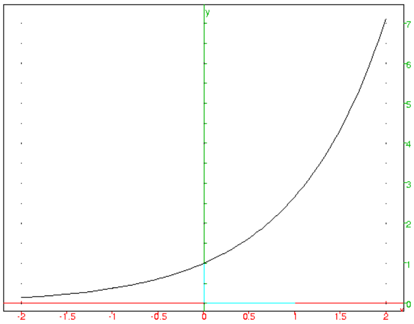
Sur XCAS, les coordonnées d'un point se notent entre crochets et pour tracer la ligne polygonale passant par des points dont on a la liste des coordonnées, on utilise la commande `polygone_ouvert([liste des coordonnées])`

```
EulerExpo(xo,yo,xfinal,h):={
X:=xo;  // au depart X vaut a
Y:=yo;  // au depart Y vaut yo
ListePoints:=[[X,Y]] // il y a un point au depart dans notre liste

 tantque abs(X) < abs(xfinal) faire // pour tester meme si h est
     negatif
    X:=X+h; // on avance de h
    Y:=(1+h)*Y; // f(X+h)=(1+h).f(X)
    ListePoints:=append(ListePoints,[X,Y]); // on rajoute a notre liste
        [X,Y]
 ftantque // fin de la boucle

polygone_ouvert(ListePoints); // on relie les points de la liste "a la
    regle"
}:;
```

Par exemple, pour avoir le tracé entre -2 et 2 sachant que $f(0) = 1$ et en prenant un pas de $0,01$ on entre :

```
EulerExpo(0,1,-2,-0.01),EulerExpo(0,1,2,0.01)
```

et on obtient :



Analysez ce programme plus rapide à écrire :

```
Euler(x,y,xfinal,h,ListePoints):={
 si abs(x)>=abs(xfinal)
 alors polygone_ouvert(ListePoints)
 sinon Euler(x+h,(1+h)*y,xfinal,h,append(ListePoints,[x,y]))
 fsi
}:;
```

que vous pouvez tester en tapant :

```
Euler(0,-2,1,-0.01,[]),Euler(0,2,1,0.01,[])
```

1 3 Analyse : étude des propriétés mathématiques d'une solution

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = kf(x)$, avec $k \neq 0$.

1. Montrez que $f'(0) = k$.

2. Soit y un réel fixé et g la fonction définie par

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

a. Montrez que g_y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'_y(x)$.

b. Calculez $g_y(0)$ et déduisez-en que pour tous x et y réels,

$$f(x+y)f(-x) = f(y) \qquad (1)$$

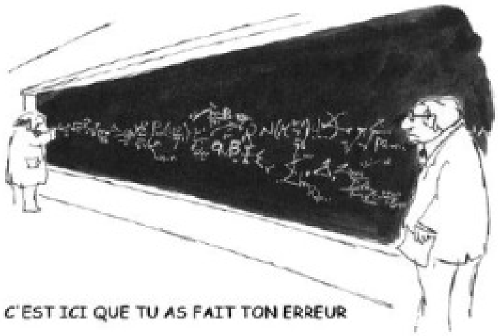
3. Montrez alors successivement que :

a. pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$

b. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

c. pour tous réels x et y

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$



1 4 Unicité de la fonction solution

Peut-on trouver une autre fonction, φ, distincte de f, et vérifiant les mêmes propriétés que f, à savoir : φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\varphi(0) = 1$ et, pour tout x, $\varphi'(x) = k\,\varphi(x)$, avec $k \neq 0$?

Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction $\psi = \varphi/f$.
Vérifiez que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculez sa dérivée. Que peut-on en déduire pour ψ ? Montrez alors que $f = \varphi$.

1 5 Synthèse

Nous avons cherché des solutions au problème

f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et, pour tout x, $f'(x) = k\,f(x)$, avec $k \neq 0$.

Nous avons montré que, *si une telle fonction existe* (ce que nous prouverons dans un prochain chapitre), alors elle est unique et elle vérifie nécessairement la relation

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (2)$$

Il reste à vérifier que, réciproquement, une fonction dérivable, non nulle, vérifiant la relation (2) est nécessairement telle que $f(0) = 1$ et vérifie pour tout réel x $f'(x) = kf(x)$, avec k un réel non nul.

Cette vérification n'est pas anodine et conclut notre raisonnement d'*analyse-synthèse*.

1. Montrez que f ne s'annule pas et que f est à valeurs strictement positives.
2. Montrez que, comme f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ en utilisant la relation (2).
3. Soit a un réel fixé. On définit la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+a)$ et la fonction $\psi : x \mapsto f(x)f(a)$.
   Montrez que $f'(x+a) = f(a)f'(x)$, puis que, pour tout réel a, $f'(a) = k\,f(a)$, où k est un réel que vous déterminerez.

1 6 Le bébé est prêt

Théorème 5 - 1

existence et unicité de la fonction exponentielle
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On la nomme **fonction exponentielle** et on la note **exp**.
L'exponentielle est à valeurs strictement positives et vérifie la relation

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

1 7 Conséquences immédiates

Vous pouvez démontrer aisément que :

Propriétés 5 - 1

- $\exp(0) = 1$
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(u) = u' \cdot \exp(u)$
- Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)} = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

1 8 La notation e^x

On pose $e = \exp(1)$. Nous avons obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$e \approx 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571 3821...$$

Nous avons obtenu précédemment que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k1) = (\exp(1))^k = e^k$$

Propriété 5 - 2

notation
Nous noterons alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Vous vérifierez que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

1 9 Propriétés analytiques de l'exponentielle

- Prouvez que

Propriété 5 - 3

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

en étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto e^x - x$

– Déduisez-en que

Propriété 5 - 4

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

– Comparez $e^{x/2}$ et $x/2$. Déduisez-en que

Propriété 5 - 5

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

.

EXERCICES

Connaissez-vous votre cours ?

Voici des exemples d'exercices s'appuyant sur une bonne connaissance du cours et qui deviennent très à la mode au Bac.

5 - 1

On sait qu'une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. *Montrez que f est à valeurs positives.*
2. *Montrez que $f(0) = 1$.*
3. *Soit a un réel fixé. Montrez que, pour tout réel x, $f'(x+a) = f(a)f'(x)$.*
4. *On suppose que $f'(0) > 0$*
   a. *Quel est le sens de variation de f ?*
   b. *Déterminez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.*
5. *Une fonction strictement croissante et à valeurs strictement positives diverge-t-elle forcément vers $+\infty$?*

5 - 2

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. *exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;*
2. *sa fonction dérivée, notée exp′, est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;*
3. *$\exp(0) = 1$.*

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que

- *Pour tout nombre réel x, $\exp(x)\exp(-x) = 1$;*
- *pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.*

5 - 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. *Rappelez la définition d'une fonction continue en zéro.*
2. *Existe-t-il une valeur de a telle que f soit continue en zéro ?*
3. *Sachant que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, montrez que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.*
4. *Rappelez la définition d'une fonction dérivable en zéro.*
5. *La fonction f est-elle dérivable en zéro ?*
6. *Calculez $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f' est-elle continue en zéro ?*
7. *Déterminez une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\begin{cases} f(x) = u(x)\exp(v(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ telle que f soit continue en zéro mais pas dérivable en zéro. Vous expliquerez au maximum les raisons qui vous ont conduit à chercher $u(x)$ et $v(x)$ sous une forme plutôt qu'une autre. toout raisonnement sera évalué même s'il n'aboutit pas à une solution explicite.*

5 - 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^x + 1,1x + 1,6$$

1. *Faites apparaître sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre*

   $$-5 \leqslant x \leqslant 4,\ -4 \leqslant y \leqslant 4$$

   Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. *D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :*
   a. *Sur les variations de la fonction f ?*
   b. *Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?*
3. *On se propose maintenant d'étudier la fonction f.*
   a. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation*

   $$e^{2x} - 2,1e^x + 1,1 \geqslant 0$$

   (on pourra poser $X = e^x$).
   b. *Étudier les variations de la fonction f.*
   c. *Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.*
4. *On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05\ ;\ 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.***

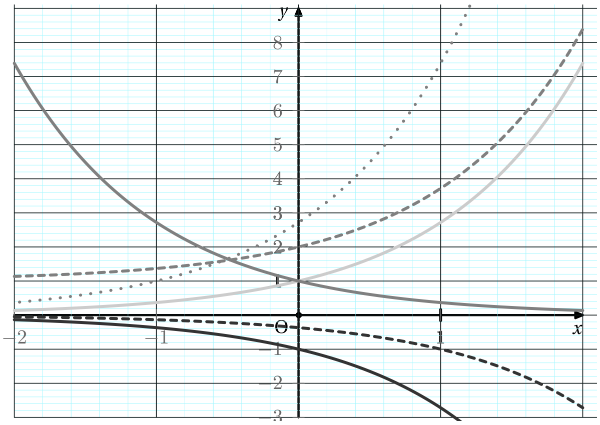
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

Exercices d'application

5 - 5

Reconnaître parmi les figures ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^{-x}$
- $x \mapsto e^{x}$
- $x \mapsto e^{x+1}$
- $x \mapsto e^{x}+1$
- $x \mapsto -e^{x}$
- $x \mapsto -e^{x-1}$



5 - 6

Développez et réduisez au maximum les expressions suivantes :

$e^{x}e^{-x}$

$e^{x}e^{-x+1}$

ee^{-x}

$(e^{-x})^2$

$\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$

$\dfrac{(e^{x})^3}{e^{2x}}$

$e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

$(e^{x})^5\left(e^{-2x}\right)^2$

$e^{-3x+1}\left(e^{x}\right)^3$

$\sqrt{e^{-2x}}$

$\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

$(e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2$

$(e^{x}-e^{-x})^2-e^{-x}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)$

$(e^{x}-e^{-x})\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)$

5 - 7

Calculez et factorisez les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x)=e^{x}+x^2+1$

$f_2(x)=5e^{x}+5xe^{x}$

$f_3(x)=e^{x}\sin(x)$

$f_4(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

$f_5(x)=\dfrac{3x+1-e^{x}}{e^{x}}$

$f_6(x)=x^3e^{-x}$

$f_7(x)=\dfrac{x^2e^{x}}{x+1}$

$f_8(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$

$f_9(x)=\dfrac{1}{e^{x}}$

$f_{10}(x)=(e^{x})^2+\dfrac{1}{e^{x}}$

$f_{11}(x)=e^{-x}$

$f_{12}(x)=e^{4x+1}$

$f_{13}(x)=e^{\cos(x)}$

$f_{14}(x)=e^{5x^3+7x+4}$

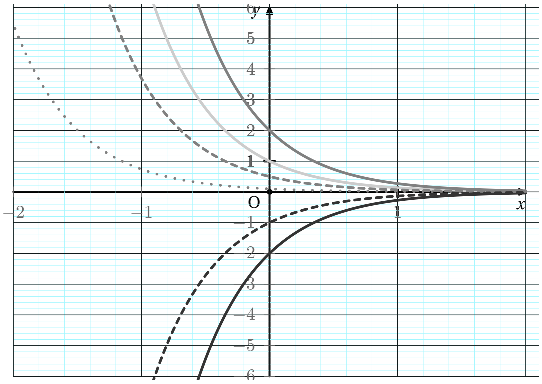
$f_{15}(x)=(x+1)e^{-x+1}$

$f_{16}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

5 - 8

1. *Résolvez l'équation différentielle $y'=-2y$.*

2. *Dans le repère ci-dessous sont représentées les courbes de quelques solutions de l'équation différentielle précédente. Déterminez pour chacune des courbes la valeur de la constante :*



3. *Pour chaque couple de coordonnées, déterminez la solution de l'équation différentielle passant par ce point : (0,1) ; (0,0) ; (0,2) ; (2,-1) ; ($\sqrt{2}$,-1)*

Des exercices de Bac

5 - 9

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=\left(2x^3-4x^2\right)e^{-x}.$$

a. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*

b. *Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=2x\left(-x^2+5x-4\right)e^{-x}$.*

c. *Dresser le tableau de variations de f.*

d. *Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).*

2. *Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $]0\,;\,+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.*

a. *On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ (où $0<a<b$).*
Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b}\,;\,\dfrac{1}{a}\right]$.

b. *On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\,;\,+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.*
Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$,

c. *Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.*

5 - 10

Six affirmations, réparties en deux thèmes et numérotées de 1. a à 2. c sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. *Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.*

Affirmation 1. a	*Pour tous les réels a et b :* $(e^a)^b = e^{\left(a^b\right)}$.
Affirmation 1. b	*Pour tous les réels a et b :* $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1. c	*La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.*

2. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.*

Affirmation 2. a	*Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*
Affirmation 2. b	*Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.*
Affirmation 2. c	*Si f est dérivable en a, alors la fonction* $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *admet une limite finie en 0.*

5 - 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. *Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.*

2. *Justifier que pour tout x, $(e^x - x)$ est strictement positif.*

Partie B

1. **a.** *Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

b. *Interpréter graphiquement les résultats précédents.*

2. **a.** *Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.*

b. *Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.*

3. **a.** *Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.*

b. *À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).*

4. *Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.*

5 - 12

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. *D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?*

2. *Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.*

3. *Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.*

4. *Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$?*
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

5 - 13

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2. *Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.*

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

1. a. *Quelle est la nature de la fonction f_0 ?*

   b. *Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.*

   Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.

2. *Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.*

   En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

3. *Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.*
   En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

5 - 14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. ***Restitution organisée de connaissances :***

   La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\left\{\begin{array}{lll} g'(x) & = & g(x) \\ g(0) & = & 1 \end{array}\right.$.

   Démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. *Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.*

5 - 15

Partie A : question de cours

1. *Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :*
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »

2. *Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g et h trois fonctions définies sur $[a\,;+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.*

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

1. *Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a, une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse a.*
2. *Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. Vérifier que $b - a = -1$.*
3. *En déduire une construction de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.*

Partie C

1. *Déterminer graphiquement le signe de f.*
2. *En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :*

   $$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

3. *En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n*

   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$$

4. *En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n*

   $$e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5. *Déduire des questions précédentes un encadrement de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ puis sa limite en $+\infty$.*

5 - 16

Soit n un entier naturel.

On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. *Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.*
2. *Étude de la fonction f_0*

   a. *Étudier le sens de variation de f_0.*

   b. *Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.*

   c. *Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.*

3. *Étude de la fonction f_1*

   a. *Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.*

   b. *En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.*

   c. *Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.*

4. *Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$*

a. *Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :*

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b. *Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.*

c. *Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.*

5 - 17

1. ***Restitution organisée de connaissances.***
L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
On supposera connus les résultats suivants :

- *la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;*
- $e^0 = 1$;
- *pour tout réel x, on a $e^x > x$.*
- *Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.*
  Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. *On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.*
Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

b. *En déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

2. *On appelle f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$.*
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe.

a. *Montrer que f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

b. *Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathcal{C}$.*

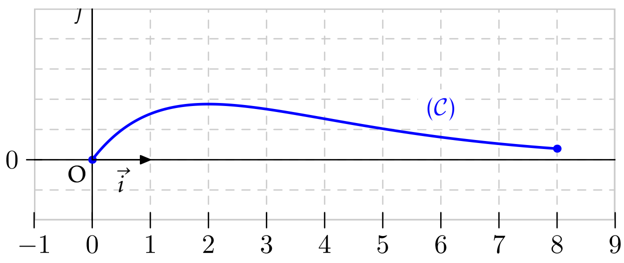
c. *Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

3. *On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) == 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.*

a. *Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

b. *Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

c. *Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.*
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.



5 - 18

1. *Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*

2. *On considère l'équation différentielle :*

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

a. *Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (E').$$

b. *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').

3. *Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.*

4. *Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.*

5. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto e^{-\frac{x}{2}}$.*

a. *Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ.*

b. *Tracer ces deux courbes sur un même graphique.*

5 - 19

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. *Déterminer la limite de g en $+\infty$.*

2. *Étudier les variations de la fonction g.*

3. *Donner le tableau de variations de g.*

4. **a.** *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.*

b. *À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.*

c. *Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.*

5. *Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.*

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $\mathrm{A}(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$.

1. *Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{A}'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.*
2. *En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.*

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La figure est donnée en annexe.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M *le point de* $(\mathcal{C})$ *de coordonnées* $(x\ ;\ f(x))$,

P *le point de coordonnées* $(x\ ;\ 0)$,

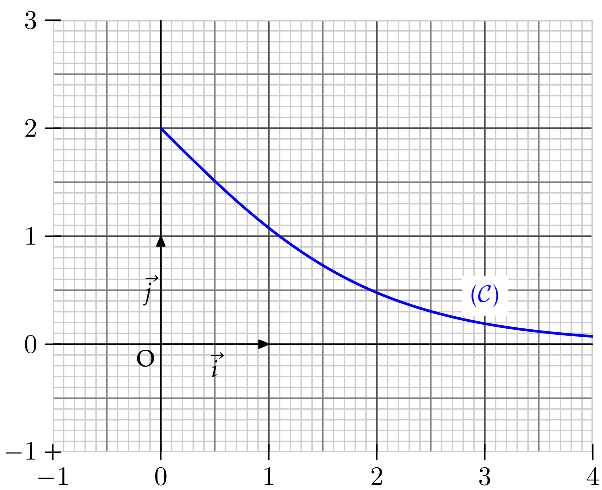
Q *le point de coordonnées* $(0\ ;\ f(x))$.

1. *Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.*

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. *Le point M a pour abscisse α.*

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.



Pour réfléchir

5 - 20

Donnez un maximum d'informations sur les fonctions $f\ :\ x \mapsto e^x \sin x$, $g\ :\ x \mapsto e^{(1/\cos x)}$ et $h\ :\ x \mapsto e^{-x}\cos x$.

5 - 21

La fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*

5 - 22 Récurrence

On pose $g_n(t) = t^n e^{-t}$. On note $g_n^{(n)}$ la dérivée n-ième de g_n. Montrer que $t \mapsto e^t g_n^{(n)}(t)$ est une fonction polynomiale de degré n.

5 - 23

On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}\ :\ x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{sh}\ :\ x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et tangente hyperbolique la fonction définie par

$$\mathrm{th}\ :\ x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

1. *Calculez $\mathrm{th}(x)$ en fonction de e^x et e^{-x}, puis en fonction de e^{2x}, enfin en fonction de e^{-2x}.*
2. *Montrez que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.*
3. *Déterminez les dérivées de ces fonctions en fonction de ch et sh.*
4. *Étudiez sh puis montrez que ch est à valeurs dans $[1, +\infty]$ et que th est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$.*
5. *Montrez que $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et que $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.*
6. *Déduisez-en que $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$*
7. *On pose $t = \mathrm{th}(x/2)$. Montrez que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ puis que $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$*
8. *Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) = 3$. Vous donnerez une valeur approchée de la solution à 10^{-3} près.*
9. *Pour le plaisir : dérivez la fonction $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)\mathrm{sh}(x)}{(\mathrm{sh}(x)+\sin(x))^2}$*

10. *Soit* $y \in \mathbb{R}$. *Comparez* $\mathrm{sh}(y)$ *et* y.

11. *Montrez que* $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$ *puis étudiez la fonction* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$f(x) = \frac{\mathrm{th}(x)}{x}$$

.

L'exponentielle à travers les sciences

5 - 24

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T *sont animées d'une vitesse de* v *cm.s*$^{-1}$. *Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de* Maxwell-Boltzmann

$$\mathrm{F}(v) = cv^2\,e^{-mv^2/(2k\mathrm{T})}$$

où T *est la température (en K),* m *la masse d'une molécule et* c *et* k *des constantes positives.*
Montrez que la valeur maximale de F *a lieu en* $v = \sqrt{2k\mathrm{T}/m}$.

5 - 25

La fonction de croissance de von Bertanlanffy *donne approximativement la masse* $\mathrm{W}(t)$ *(en kg) à l'âge* t *(en années) des éléphantes africaines. Son expression est*

$$\mathrm{W}(t) = 2600\left(1 - 0{,}51e^{-0{,}075\,t}\right)^3$$

1. *Évaluez la masse et le taux de croissance d'un nouveau-né (le taux de croissance à l'instant* t *est évidemment* $\mathrm{W}'(t)$*).*

2. *Calculez et interprétez* $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{W}(t)$.

5 - 26

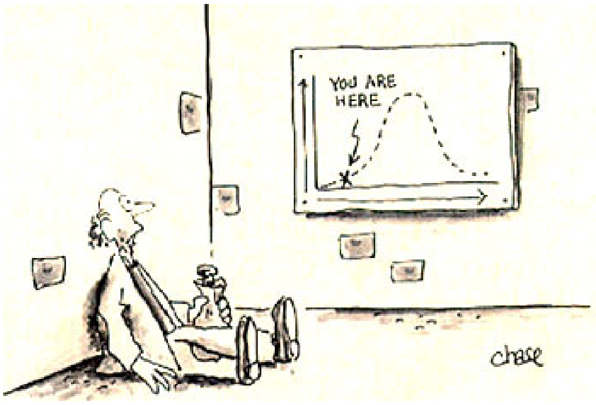
Un modèle de densité urbaine est une formule qui lie la densité de la population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance r *(en unité de longueur) du centre ville. La formule*

$$\mathrm{D} = a\,e^{-br+cr^2}$$

où a, b *et* c *sont des constantes positives (*a *est la densité au centre,* b *le coefficient de décroissance), convient pour certaines villes des États-Unis*

Déterminez l'allure de la courbe représentative de ce modèle.

5 - 27



En statistiques, la distribution normale est définie par la fonction de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \quad \text{où} \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ *est la moyenne de cette distribution et* σ^2 *la variance. L'étude de cette fonction est utilisée dans des domaines qui vont de la mécanique quantique à la répartition des notes du baccalauréat. Étudiez cette fonction (sens de variation, limites) et tracez la courbe représentative de* f.

5 - 28

On considère un circuit électrique composé d'une force électromotrice U*, d'une résistance* R *et d'une inductance* L*. L'intensité du courant* I *varie en fonction du temps* t *selon la formule*

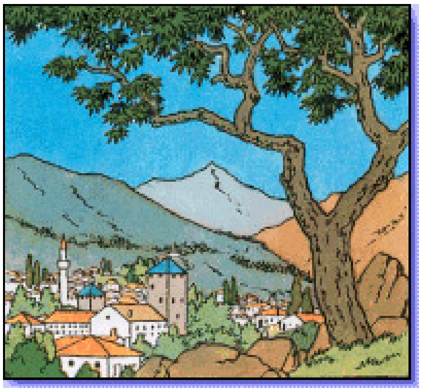
$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}\left(1 - e^{-\mathrm{R}t/\mathrm{L}}\right)$$

On considère que R *est la seule variable indépendante, i.e.* U, L *et* t *sont considérés comme des constantes et* R *comme une variable. Calculez* $\lim\limits_{\substack{\mathrm{R}\to 0\\ \mathrm{R}>0}} \mathrm{I}$.

5 - 29

La loi de Newton sur le refroidissement dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à l'écart de température entre l'objet et le milieu ambiant. L'inspecteur Clouseau *arrive sur les lieux d'un meurtre à 9h00. Il commence par prendre la température de la victime : 30°C. Une heure plus tard, la température du corps est tombée à 29°C. Sachant que la température normale du corps d'une personne vivante en bonne santé est de 37°C, que la victime était syldave, qu'elle aimait les films de gladiateurs et se trouvait dans une pièce maintenue à 0°C, estimez l'heure du décès de la victime et la couleur de ses yeux.*

5 - 30



Dans la forêt syldave, des détritus naturels (feuilles, branches, animaux morts, cadavres d'espions, etc.) tombent sur le sol et s'y décomposent. La quantité $\mathrm{Q}(t)$ *exprimée en* $g \cdot m^{-2}$ *de détritus jonchant le sol varie avec le temps* t*. On suppose que de nouveaux détritus tombent au sol à un taux constant de* $200\,g \cdot m^{-2}$ *par année et que les détritus accumulés au sol se décomposent au taux de* 50% *de la quantité de détritus jonchant le sol.*

1. *On note* $f(t) = \mathrm{Q}(t) - 200$*. Déterminez une équation différentielle vérifiée par* f*.*
2. *En déduire l'expression générale de* $\mathrm{Q}(t)$*.*
3. *Exprimer* $\mathrm{Q}(t)$ *sachant qu'au temps* $t = 0$*, on comptait* $50\,g \cdot m^{-2}$

Dans les exercices qui suivent on utilisera les notations vues dans l'exercice 5.17 page 136

5 - 31

Si vous allez vous promener dans la ville de Saint-Louis dans le Missouri aux États-Unis, vous pourrez y admirer la célèbre Gateway Arch to the West *conçue en 1947 par l'architecte finlandais Ero* Saarinen *et l'ingénieur Hannskarl* Bandel *et dont la construction s'acheva en 1965. Cette arche a la forme d'une* chaînette *pondérée d'équation*

$$y = 212 - 21\,\mathrm{ch}(0{,}033x)$$

où x *et* y *sont mesurés en mètres et rend hommage aux pionniers partis à la conquête de l'Ouest.*
Pouvez-vous déterminer la hauteur de l'arche et la distance entre les deux pieds ?

5 - 32

L'équation de la hauteur h *par rapport au sol d'un fil électrique suspendu entre deux poteaux s'obtient en résolvant l'équation* différentielle

$$h''(x) = k\sqrt{1 + (h'(x))^2}$$

où k *est un paramètre qui dépend de la densité et de la tension du fil et* x *est mesuré en mètres horizontalement à partir d'une origine située sur le sol en-dessous du point où la hauteur du fil est la plus faible.*

1. *Vérifiez que* $h\ :\ x \mapsto \frac{1}{k}\,\mathrm{ch}(kx)$ *satisfait cette équation différentielle.*
2. *Quelle est la hauteur minimale du fil si le paramètre* k *vaut* $0{,}05$ *?*
3. *Quelle est la hauteur des poteaux (de même hauteur) s'ils sont distants de 30 m et que le paramètre* k *vaut 0,05 ?*

CHAPITRE

6

COMPLEXES : LE RETOUR...

1 Approche géométrique

Si je vous dis transformation du plan, vous pensez sûrement à des points qui se transforment en d'autres points et qui gardent plein de propriétés intéressantes : les longueurs, les angles, les alignements, le parallélisme se conservent. Il y a juste une exception avec l'homothétie qui multiplie les longueurs.

C'est en effet un résumé de vos aventures géométriques des années passées. Depuis, vous avez rencontré, lors de l'étude des nombres complexes notamment, d'autres transformations plus étranges, qui transforment des droites en cercles ou en tout autre chose d'ailleurs.

Nous allons nous occuper aujourd'hui d'une catégorie bien particulière de transformations, parmi bien d'autres, mais avant il faudrait s'entendre sur ce qu'est une transformation du plan...

Définition 6 - 1

transformation du plan

On dit que f est une **transformation du plan** si

– tout point du plan a une unique image par f

– tout point du plan admet un unique antécédent par f

Par exemple, une projection orthogonale n'est pas une transformation du plan selon notre définition.

Un exemple très important en géométrie, que vous connaissez depuis tout petit (agrandissem réduction), est l'homothétie :

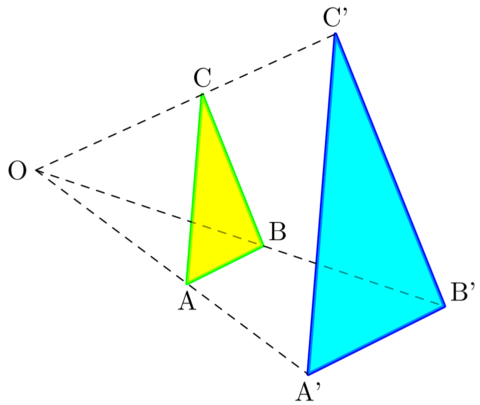
Définition 6 - 2

homothétie

Soit C un point du plan et λ un réel non nul.

On appelle **homothétie de centre C et de rapport λ** la transformation qui à tout point M du plan associe le point M′ tel que

$$\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$$

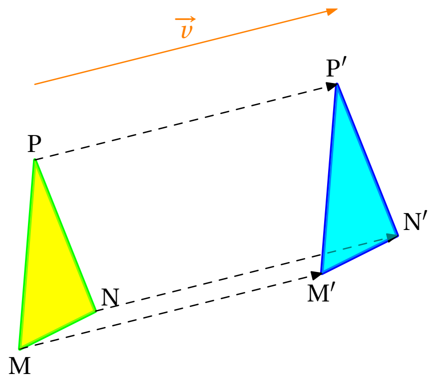


Un autre cas simple est la translation :

Définition 6 - 3

translation
La **translation** de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la transformation qui à tout point M associe le point M′ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{v}$$

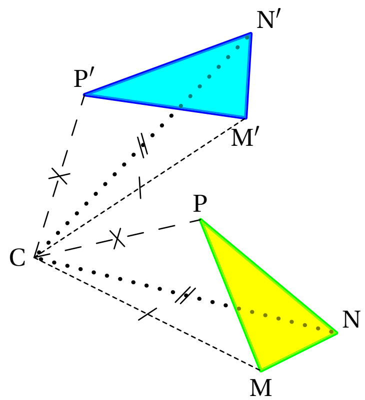


Nous étudierons enfin les rotations :

Définition 6 - 4

rotation
La **rotation** de centre C et d'angle α est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M′ tel que

– si $M \neq M'$, alors $CM = CM'$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}) = \alpha$
– si $M = C$, alors $M' = C$



2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Mathémator : Avant d'aller plus loin, nous allons avoir besoin d'un petit outil technique. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + i \sin x$. C'est une fonction un peu spéciale puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Que vaut $f(0)$?

Téhessin : $f(0) = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$: jusqu'ici, tout va bien.

Mathémator : Je vous demande à présent un petit effort d'imagination : on peut supposer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en considérant i comme un coefficient quelconque et en extrapolant les formules de dérivations des fonctions à valeurs réelles. Qu'est-ce que ça peut donner ?

Téhessin : $f'(x) = -\sin x + \mathrm{i}\cos x$

Mathémator : Essayez alors de faire le lien avec $f(x)$.

Téhessin : $f'(x) = \mathrm{i}(\mathrm{i}\sin x + \cos x) = \mathrm{i}f(x)$: oui, et alors ?

Mathémator : Récapitulons : f vérifie $f' = \mathrm{i}f$ avec $f(0) = 1$. Ça ne vous rappelle rien ?

Téhessin : Ciel ! Ma fonction exponentielle ! On avait $f' = kf$ et $f(0) = 1$ alors on en concluait que $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.

Mathémator : Donc vous ne serez pas choqué si nous écrivons, par convention d'écriture à notre niveau, que $f(x) = \exp(\mathrm{i}x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Théorème 6 - 1

notation exponentielle
On convient d'écrire, pour tout réel x

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

Notez au passage que les formules d'additions sont alors plus faciles à retrouver. En effet, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, donc

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b) &= (\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\ &= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + \mathrm{i}(\cos a\sin b + \cos b\sin a) \end{aligned}$$

Alors, par unicité de la forme algébrique d'un complexe, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$$

Voici une illustration du côté extrêmement pratique de l'outil complexe.

3 Écriture complexe des transformations usuelles

3 1 Translations

Mathémator : Considérons la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe b et les habituels points M et M′ d'affixes z et z'. Par définition, on a $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{v}$. Traduisez ceci à l'aide de l'outil complexe.

Téhessin : Facile : $z_{\overrightarrow{\mathrm{MM}'}} = z' - z = b$, i.e. $z' = z + b$. Impeccable, car on retrouve une expression du type $az+b$, donc c'est bien une similitude directe de rapport $|a| = |1| = 1$, donc une isométrie : c'est sûr que ça commence à me plaire de travailler avec les complexes.

Mathémator : J'espère que vous n'êtes pas ironique. Notons ce résultat au passage

Propriété 6 - 1

translation : version complexe
La transformation complexe définie par

$$z \mapsto z + b$$

est la translation de vecteur d'affixe b

3 2 Rotations

Mathémator : Essayez de vous débrouiller avec la rotation de centre C d'affixe c et d'angle de mesure α.

Téhessin : Bon, on sait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CM}'}\right) = \alpha = \arg \dfrac{z'-c}{z-c}$ et $\mathrm{CM}' = \mathrm{CM}$, donc

$$\frac{\mathrm{CM}'}{\mathrm{CM}} = 1 = \left|\frac{z'-c}{z-c}\right|$$

On en déduit que $(z'-c)/(z-c)$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument de mesure α. On peut à la rigueur écrire

$$(z'-c)/(z-c) = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$$

Tout ceci ne nous mène pas à grand chose.

Mathémator : Au contraire ! Mais avant tout, vous avez un CM au dénominateur, il faut donc s'assurer qu'il est non nul, donc que $\mathrm{M} \neq \mathrm{C}$. On verra ensuite si on rattraper le coup. Pour ce qui est de l'interprétation, nous pouvons utiliser un outil tout juste découvert quelques lignes plus haut : un complexe de module 1 et de mesure congrue à α modulo 2π s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
Ainsi $(z'-c) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-c)$. Vous remarquerez que cette formulation reste valable si $z = c$: en effet, $c' = c$ car le centre de la rotation est invariant.

Téhessin (à part) : *Là, je vais lui clouer le bec...**(tout haut)*** Et je suppose qu'on vérifie que, réciproquement, toutes les transformations de ce style sont des rotations d'angle α. Finalement, toute rotation s'exprime sous la forme $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + b$.

Mathémator : Justement non, et c'est pourquoi ces vérifications ne sont pas anodines : en effet, si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, nous sommes bien embêtés car nous obtenons une translation de vecteur d'affixe b.

Propriété 6 - 2

rotation : version complexe
La transformation complexe définie par

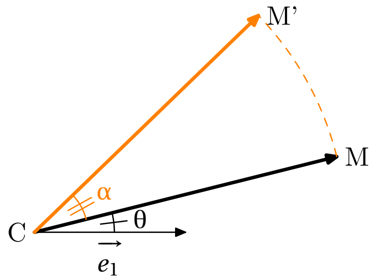
$$z \mapsto ze^{i\alpha} + b$$

est une rotation d'angle α avec $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$

En fait, ça se comprend. Notons $z - c = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, alors

$$z' - c = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}$$

ce qui peut se traduire par : « on garde la même distance, on tourne de α »



3 3 Homothéties

Mathémator : Pas grand chose à dire ici. Avec les notations habituelles, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{CM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, d'où $z' - c = k(z - c)$, i.e. $z' = kz + c(1-k)$. Ainsi une homothétie a une représentation complexe de la forme $z \mapsto kz + b$.

Téhessin (à part) : *Soyons prudent...**(tout haut)** Il faut faire attention : on ne doit pas avoir $z = z + b$ qui nous fait retomber sur une translation, donc k doit être différent de 1.*

Mathémator : Vous progressez, mon brave Téhessin. Pour éviter toute confusion, nous prendrons l'habitude de commencer notre étude par la recherche des points invariants : c'est ce que nous verrons un peu plus loin dans notre étude générale des similitudes.

Propriété 6 - 3

homothéties : version complexe
La transformation complexe définie par

$$z \mapsto kz + b \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

est une homothétie de rapport k

EXERCICES

6 - 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes, l'équation diinconnue* z *:*

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0.$$

2. *On considère les points A d'affixe* $z_A=\sqrt{3}-i$, *B d'affixe* $z_B=\sqrt{3}+i$ *et C le milieu de [OB] d'affixe* z_C.
   - **a.** *Déterminer la forme exponentielle de* z_A, z_B *et* z_C.
   - **b.** *Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.*
   - **c.** *Montrer que le triangle OAB est équilatéral.*
3. *Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *et E l'image de D par la translation t de vecteur* $2\vec{v}$.
   - **a.** *Placer les points D et E sur une figure.*
   - **b.** *Montrer que l'affixe* z_E *du point E vérifie :* $z_E=\frac{1}{2}\left[1+i\left(4-\sqrt{3}\right)\right]$.
   - **c.** *Montrer que* $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.
4. *Montrer que les points A, C et E sont alignés.*
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

6 - 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\right)$. *On note I son centre et J le milieu de [AI].*

1. *C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :*
   - **a.** $m=-2$
   - **b.** $m=2$
   - **c.** $m=-1$
   - **d.** $m=3$
2. - **a.** *B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
   - **b.** *Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est* $\frac{2}{3}$.
   - **c.** *Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.*
   - **d.** *J est l'image de I par la translation de vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.
3. *L'ensemble des points M du plan tels que* $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=AB$ *est :*
   - **a.** *la médiatrice de [AC].*
   - **b.** *le cercle circonscrit au carré ABCD.*
   - **c.** *la médiatrice de [AI].*
   - **d.** *le cercle inscrit dans le carré ABCD.*
4. *L'ensemble des points M du plan tels que :*

$$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

   est :
   - **a.** *la médiatrice de [AC].*
   - **b.** *le cercle circonscrit au carré ABCD.*
   - **c.** *la médiatrice de [AI].*
   - **d.** *le cercle inscrit dans le carré ABCD.*

6 - 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. *On considère les points A, B et C d'affixes respectives* $z_A=2+2i$, $z_B=2i$ *et* $z_C=2$ *ainsi que le cercle* Γ *de centre A et de rayon 2.*
   La droite (OA) coupe le cercle Γ *en deux points H et K tels que* $OH<OK$. *On note* z_H *et* z_K *les affixes respectives des points H et K,*
   - **a.** *Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.*
   - **b.** *Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.*
   - **c.** *Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que*

$$z_K=\left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\qquad z_H=\left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

***Dans toute la suite**, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe* $z\neq0$ *associe le point M′ d'affixe z′ telle que :*

$$z'=\frac{-4}{z}.$$

2. a. Déterminer et placer les points images de B et C par f.
   b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image.
   Déterminer les points invariants par f.
3. a. Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :
   $$\mathrm{OMOM'} = 4.$$
   b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.
4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.
   a. Calculer OK′ et OH′.
   b. Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   c. Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

6 - 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a=-1+2i$, $b=1+3i$, $c=4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et z_I son affixe.
   a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-z_I}{z-a}$ soit un réel ?
   b. Déterminer l'unique réel x tel que $\dfrac{x-z_I}{x-a}$ soit un réel.
   c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$, donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.
3. a. Soit G le point d'affixe -3. Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
   b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.
   Déterminer l'écriture complexe de r_1.
4. Soit A′, B′ et C′ les images respectives de A, B, et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.
   Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ?
   En déduire que $b' = \overline{c'}$.

6 - 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=3+4i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})$ et
$z_D = -2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$.
L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.
   b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.
   a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
   b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
   c. Montrer que $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l 'évaluation.

6 - 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :
$$a=3-i,\quad b=1-3i \text{ et } c=-1-i.$$

1. a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   b. En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-i)m}{2}+2+i$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m=\sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. *Calculer* $|q-2-i|$. *Quel est le lieu* Γ' *de* Q *lorsque* M *décrit le cercle* Γ *?*

6 - 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. *On prendra pour unité graphique 2 cm.*
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a=3-i,\quad b=1-3i \text{ et } c=-1-i.$$

1. **a.** *Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.*

b. *Quelle est la nature du triangle ABC ?*

c. *Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle* Γ *de centre* O*, dont on calculera le rayon.*

2. *Soit* M *un point quelconque du plan d'affixe notée* m *et* N *le point d'affixe notée* n*, image de A dans la rotation* r *de centre* M *et d'angle de mesure* $\frac{\pi}{2}$.

a. *Donner l'écriture complexe de la rotation* r.

b. *En déduire une expression de* n *en fonction de* m.

3. *On appelle* Q *le milieu du segment* [AN] *et* q *son affixe.*
Montrer que : $q=\dfrac{(1-i)m}{2}+2+i$.

4. *Dans cette question,* M *est un point du cercle* Γ.

a. *Justifier l'existence d'un réel* θ *tel que :* $m=\sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. *Calculer* $|q-2-i|$. *Quel est le lieu* Γ' *de* Q *lorsque* M *décrit le cercle* Γ *?*

6 - 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ *(unité graphique : 2 cm).*
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B=\overline{z_A} \text{ et } z_C=-3.$$

Partie A

1. *Écrire les nombres complexes* z_A *et* z_B *sous forme exponentielle.*

2. *Placer les points A, B et C.*

3. *Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.*

Partie B

Soit f *l'application qui, à tout point* M *du plan d'affixe* z*, associe le point* M′ *d'affixe* $z'=\frac{1}{3}iz^2$.
On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f *aux points O, A, B et C.*

1. **a.** *Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.*

b. *Placer les points A′, B′ et C′ .*

c. *Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.*

2. *Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par* f.

a. *Déterminer les affixes des points G et G′.*

b. *Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ?*

3. *Démontrer que si* M *appartient à la droite (AB) alors* M′ *appartient à la parabole d'équation* $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$. *(On ne demande pas de tracer cette parabole)*

6 - 9

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, B *d'affixe* b *où* b *est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.*
On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés directs ODCA et OBEF.

1. *Déterminer les affixes* c *et* d *des points C et D.*

2. *On note* r *la rotation de centre O et d'angle* $+\frac{\pi}{2}$.

a. *Déterminer l'écriture complexe de* r.

b. *En déduire que l'affixe* f *du point* F *est* ib.

c. *Déterminer l'affixe* e *du point* E.

3. *On appelle* G *le point tel que le quadrilatère OFGD soit un parallélogramme.*
Démontrer que l'affixe g *du point* G *est égal à* $i(b-1)$.

4. *Démontrer que* $\dfrac{e-g}{c-g}=i$ *et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.*

6 - 10

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connus les résultats suivants :

- *Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives* a*,* b *et* c*, avec* $A\neq C$ *et* $A\neq B$ *:*
$\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right|=\dfrac{AB}{AC}$ *et* $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}\right)+k2\pi$ *où* k *est un entier relatif ;*
- *Soit* z *un nombre complexe et soit* θ *un nombre réel :*
$z=e^{i\theta}$ *si et seulement si* $|z|=1$ *et* $\arg(z)=\theta+k2\pi$ *où* k *est un entier relatif.*

Démontrer que la rotation r *d'angle* α *et de centre* Ω *d' affixe* ω *est la transformation du plan qui à tout point* M *d'affixe* z *associe le point* M′ *d'affixe* z' *telle que :* $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, *unité graphique 1 cm.*
Soit f *l'application qui, à tout point* M *d'affixe* z *associe le point* M′ *d'affixe* z' *telle que :*

$$z' = iz + 4 + 4i.$$

1. **a.** *Déterminer l'affixe* ω *du point* Ω *tel que* $f(\Omega) = \Omega$

b. *Montrer que, pour tout nombre complexe* z *on a :* $z' - 4i = i(z - 4i)$.

c. *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de* f.

2. *On note A et B les points d'affixes respectives* $a = 4 - 2i$ *et* $b = -4 + 6i$.

a. *Placer les points A, B et* Ω *sur une figure que l'on completera au fur et à mesure des questions.*

b. *Déterminer les affixes des points A′ et B′ images respectives des points A et B par* f.

3. *On appelle* m, n, p *et* q *les affixes des points M N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA′], [A′B], [BB′] et [B′A].*

a. *Déterminer* m. *On admettra que* $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ *et* $q = 1 - i$.

b. *Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.*

c. *Déterminer la forme algëbrique du nombre complexe* $\dfrac{q-m}{n-m}$.
En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

4. *Démontrer que les droites (B′A) et (*Ω*N) sont perpendiculaires.*

6 - 11

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, *on associe à tout point* M *d'affixe* z *non nulle, le point* M′ *milieu du segment* $[\mathrm{MM}_1]$ *où* M_1 *est le point d'affixe* $\dfrac{1}{z}$.
Le point M′ *est appelé l'image du point* M.

1. **a.** *Montrer que les distances* OM *et* OM_1 *vérifient la relation* $\mathrm{OM}\,\mathrm{OM}_1 = 1$ *et que les angles* $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}\right)$ *et* $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ *vérifient l'égalité des mesures suivantes* $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}\right) = -\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ *à* 2π *près.*

b. *Sur une figure placez le point A appartenant au cercle de centre O et de rayon 2.*
Construire le point A′ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. **a.** *Justifier que pour tout nombre complexe* z *non nul, le point* M′ *a pour affixe* $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b. *Soient B et C les points d'affixes respectives* $2i$ *et* $-2i$. *Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.*

c. *Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure.*

3. *Déterminer l'ensemble des points* M *tels que* M′ = M.

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Montrer que si le point M *appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image* M′ *appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives* -1 *et 1.*

6 - 12

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. *Soit (E) l'ensemble des points* M *d'affixe* z *vérifiant :* $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ *étant un nombre réel.*

a. *(E) est une droite passant par le point d'affixe* $2 - 2i$.

b. *(E) est le cercle de centre d'affixe* $-1 + 2i$ *et de rayon 1.*

c. *(E) est le cercle de centre d'affixe* $1 - 2i$ *et de rayon 1.*

d. *(E) est le cercle de centre d'affixe* $1 - 2i$ *et de rayon* $\sqrt{5}$.

2. *Soit* f *l'application du plan qui, à tout point* M *d'affixe* z *associe le point* M′ *d'affixe* z' *tel que* $z' = -iz - 2i$.

a. f *est une homothétie.*

b. *Le point d'affixe* $-1 - 2i$ *est un antécédent du point d'affixe i.*

c. f *est la rotation de centre le point d'affixe* $1 + i$ *et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

d. f *est la rotation de centre le point d'affixe* $-1-i$ *et d'angle* $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. *Soit (F) l'ensemble des points* M *d'affixe* z *vérifiant* $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$.
Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1 - i$, $-1 + 2i$ *et* $-1 - 2i$.

a. *C est un point de (F).*

b. *(F) est la médiatrice du segment [AB].*

c. *(F) est la médiatrice du segment [AC].*

d. *(F) est le cercle de diamètre [AB].*

4. *On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z+|z|^2=7+i$. Cette équation admet :*
   a. *Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.*
   b. *Une solution réelle.*
   c. *Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.*
   d. *Une solution qui a pour partie imaginaire 2.*

6 - 13

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a=5+5i$, $b=5-5i$ et $p=10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. *Démontrer que l'affixe du point U est $u=i(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère MUDT est un parallélogramme de centre O.*
2. *Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z}-5z-5\overline{z}=0$.*

   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. *On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.*
   a. *Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z}=\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.*
   b. *Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.*
4. *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère MUDT ?*
5. *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère MUDT dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.*

   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que MUDT soit un carré.

6 - 14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$; unité graphique : 4 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que

$$z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z.$$

1. *Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.*
2. *On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0=1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $\mathrm{M}_{n+1}=f(\mathrm{M}_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.*
   a. *Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n=e^{i\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.*
   b. *Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.*
   c. *Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.*
3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Prouver que les triangles $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_7\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

6 - 15

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. *On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A=\sqrt{3}+2i$.*
   a. *Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.*

      Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.
   b. *On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.*

      Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B=-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

      Justifier que le point B appartient au cercle Γ.
   c. *Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.*
   d. *Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.*
2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BI}$.

   Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?

   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

6 - 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ *(unité : 1 cm).*
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω *d'affixes respectives* $a=-2+4i$, $b=-4+2i$, $s=-5+5i$ *et* $\omega=-2+2i$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** *Déterminer l'écriture complexe de h.*

b. *Démontrer que le point C a pour affixe* $c=4+2i$ *et que le point D a pour affixe* $d=-2-4i$.

2. *Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.*

3. *Démontrer que la droite (S*Ω*) est la médiatrice du segment [AB].*

4. *Soit P le milieu du segment [AC].*

a. *Déterminer l'affixe p du point P.*

b. *Démontrer que* $\dfrac{\omega-p}{d-b}=-\dfrac{1}{2}i$. *En déduire une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{P\Omega}\right)$.

5. *Soit Q le milieu du segment [BD].*
Que représente le point Ω *pour le triangle PQS ?*

6 - 17

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ *d'unité graphique 2 cm.*
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A=-2i,\quad z_B=-\sqrt{3}+i \text{ et } z_C=\sqrt{3}+i.$$

1. **a.** *Écrire* z_A, z_B *et* z_C *sous forme exponentielle.*

b. *En déduire le centre et le rayon du cercle* Γ *passant par les points A, B et C.*

c. *Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle* Γ *puis placer les points B et C.*

2. **a.** *Écrire le quotient* $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ *sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.*

b. *En déduire la nature du triangle ABC .*

3. *On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant* $\dfrac{\pi}{3}$ *radians.*

a. *Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe* $-\sqrt{3}-i$.

b. *Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle* Γ.

c. *Tracer l'image* Γ' *du cercle* Γ *par la rotation r.*

d. *Justifier que les cercles* Γ *et* Γ' *se coupent en A et B.*

4. **a.** *Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que*

$$|z|=\left|z+\sqrt{3}+i\right|.$$

b. *Montrer que les points A et B appartiennent à (E).*

6 - 18

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ *d'unité 1 cm.*

1. ***Restitution organisée de connaissances***

Pour $M\neq\Omega$, *on rappelle que le point M′ est l'image du point M par la rotation r de centre* Ω *et d'angle de mesure* θ *si et seulement si :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1)\\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k\in\mathbb{Z}) & (2)\end{array}\right.$$

a. *Soient z, z′ et* ω *les affixes respectives des points M, M′ et* Ω.
Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b. *En déduire l'expression de z′ en fonction de z,* θ *et* ω

2. *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation :*

$$z^2-4\sqrt{3}z+16=0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. *Soient A et B les points d'affixes respectives* $a=2\sqrt{3}-2ß$ *et* $b=2\sqrt{3}+2ß$.

a. *Écrire a et b sous forme exponentielle.*

b. *Faire une figure et placer les points A et B.*

c. *Montrer que OAB est un triangle équilatéral.*

4. *Soit C le point d'affixe* $c=-8ß$ *et D son image par la rotation de centre O et d'angle* $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d=4\sqrt{3}+4ß$.

5. *Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.*

6. *Montrer que OAD est un triangle rectangle.*

CHAPITRE

7

LES SUITES

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des fonctions numériques, les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Elles permettent en effet dans les deux cas de fournir une approximation du « réel » . Après avoir mis en place un raisonnement important et fait quelques rappels de première, nous découvrirons donc la notion de limite de suite sous les angles physique et mathématique, puis nous parlerons d'applications importantes, en particulier les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et les suites adjacentes.

1 Récurrence

1 1 Découverte

1 1 a Génétique syldave

Les scientifiques syldaves viennent de mettre en évidence que la terrible maladie de Mathieu est en fait héréditaire : cette maladie frappe depuis des siècles les petits syldaves et les fait naître avec un unique mais énorme cheveu sur la tête.
C'est Vaclav Grtschtsz qui, le premier, contracta cette maladie en 1643 après être rentré en contact avec des vénusiens : ce fait peu connu marque la cause de l'apparition de la maladie en Syldavie. Depuis, tous ses descendants ont souffert de ce terrible mal et aucun médicament terrestre ne semble en mesure de stopper cette calamité.
Résumons les faits :

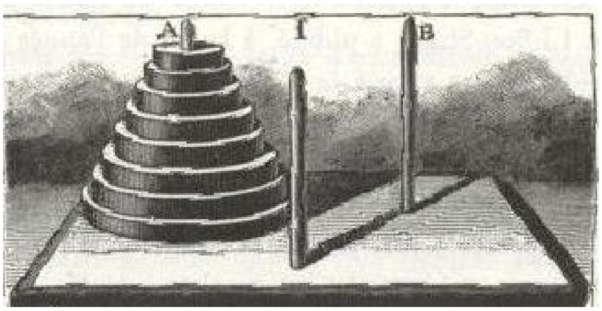
1. la maladie de Mathieu fait naître les nouveaux nés avec un énorme et unique cheveu sur la tête. Notons n la n^{e} génération aprés Vaclav.
   Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « la n^{e} génération sera infectée par la maldie »
2. initialisation : un premier syldavien est infecté en 1643, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
3. l'hérédité de la maladie a été prouvée : si un des parents de la k^{e} génération est atteint, alors ses enfants de la $k+1^{\text{e}}$ génération seront également infectés, ce qui se traduit par

$$\mathcal{P}(k) \text{ vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1) \text{ vraie}$$

4. nous en déduisons que, quelque soit la génération n des descendants de Vaclav, ceux-ci seront infectés, c'est à dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier naturel n.

1 1 b Les tours de Hanoï

Édouard Lucas, mathématicien français, proposa le jeu suivant en 1883 [a] :



L'objectif est de tranférer la tour du piquet A vers le piquet B en ne déplaçant qu'un disque à la fois et en ne plaçant jamais un disque sur un autre de dimension plus petite.
Lucas présenta son jeu comme une version miniature de la tour de Brahma, qui aurait 64 disques d'or pur et trois piquets en diamant. Dieu, au commencement du monde, aurait placé les 64 disques sur le premier piquet et aurait ordonné à un groupe de moines de les transférer sur un autre piquet selon les lois rappelées ci-dessus. Quand ils auront fini, les tours s'écrouleront et ce sera la fin du monde...

a. Vous pourrez vous reporter à l'ouvrage *Concrete mathematics* de Graham, Knuth et Patashnik paru en 1998 chez addison-Wesley

Nous aimerions connaître la date de la fin du monde. La tour de Hanoï a 8 disques, celle de Brahma 64...Allons ! Généralisons un peu. Considérons une tour de n disques. Bon, regardons ce qui se passe pour $n = 1$, $n = 2$. Allez, avec un peu de réflexion on peut s'occuper de $n = 3$. Cela nous donne quelques idées.
Pour généraliser, introduisons quelques notations. Soit T_n le nombre minimum de coups pour transférer n disques. Il est clair que $T_1 = 1$, $T_2 = 3$. On peut même aller jusqu'à dire que $T_0 = 0$: il faut 0 mouvement pour bouger 0 disque !
Essayons maintenant de voir plus loin. En testant avec 3 disques, on s'aperçoit qu'une bonne stratégie est de transférer les deux disques supérieurs sur le piquet central puis le grand disque sur B puis les deux autres disques sur B. Cela nous donne une idée générale pour n disques : on transfère $n-1$ disques sur le piquet central (nécessite T_{n-1} mouvements), puis le grand disque sur B (un mouvement) puis les $n-1$ autres disques sur B (T_{n-1} mouvements).
Nous pouvons donc déplacer n disques en au plus $2T_{n-1}+1$ mouvements :

$$T_n \leqslant 2T_{n-1}+1$$

Nous avons montré qu'il *suffit* d'effectuer $2T_{n-1}+1$ mouvements, mais est-ce *nécessaire* ? Ainsi, l'inégalité peut-elle se transformer en égalité ?
En fait, à un moment donner il faut bien déplacer le plus grand disque. Pour cela il faut que les $n-1$ du dessus soient sur un autre piquet et cela demande au moins T_{n-1} mouvements. Ensuite il faut bien bouger le plus grand disque au moins une fois pour qu'il arrive à un moment donné sur le piquet B. Enfin, il faut bien qu'à un moment donné les $n-1$ autres disques passent du piquet central au piquet B : cela nécessite au moins T_{n-1} mouvement.
Ainsi,

$$T_n \geqslant 2T_{n-1}+1$$

Finalement, en regroupant les deux inégalités, on obtient :

$$T_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = 2T_{n-1}+1$$

Alors, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 7$, $T_4 = 15$, $T_5 = 31$, $T_6 = 63$, $T_7 = 127$ donc nous allons pouvoir calculer de proche ne proche T_{64} mais cela n'est guère pratique. Nous aimerions avoir une formule directe.
Bon, avec une petite habitude des chiffres, on devine que pour les premiers termes, T_n a l'air de valoir 2^n-1. Ben oui, les puissances de 2, vous connaissez : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,...
Ça marche au début au moins, mais est-ce que ça marchera toujours ? Pour cela, nous allons utiliser un raisonnement important : l'*induction*, appelé également *raisonnement par récurrence*.

Ça marche pour le cas initial : $2^0 - 1 = 1 - = 0 = T_0$.
Ça marche donc au moins une fois pour, disons, k disques. Que se passe-t-il alors pour $k+1$?

$$T_{k+1} = 2T_k + 1 = 2\left(2^k - 1 + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1\right)$$

Waouh, si ça marche une fois, ça marche le coup d'après, donc à tous les coups suivants ! Or on sait que ça marche au moins une fois puisque c'est vrai pour $n = 0$. C'est donc toujours vrai.
On en déduit que $T_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.
Supposons que les moines sont très rapides et bougent un disque en une seconde. Il faudra donc environ 584 milliards d'années pour y arriver...
Pour ce qui est des tours de Hanoï, il suffit de $2^8 - 1 = 255$ mouvements.
Nous pouvons illustrer ces manipulations à l'aide d'un petit programme XCAS :

```
hanoi(n,A,B,C):={
si n==1 alors
  afficher("Deplacer le disque en "+string(A)+" sur le piquet "+string(
      C));
sinon
  hanoi(n-1,A,C,B);
  afficher("Deplacer le disque en "+string(A)+" sur le piquet "+string(
      C));
  hanoi(n-1,B,A,C);
fsi
}:;
```

Par exemple, pour trois disques :

```
hanoi(3,A,B,C)
```

donne :

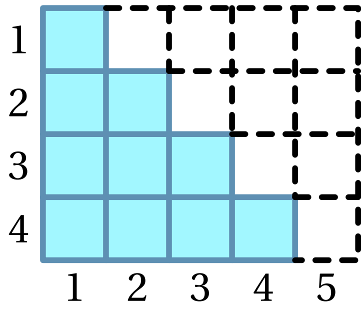
```
Deplacer le disque en A sur le piquet C
Deplacer le disque en A sur le piquet B
Deplacer le disque en C sur le piquet B
Deplacer le disque en A sur le piquet C
Deplacer le disque en B sur le piquet A
Deplacer le disque en B sur le piquet C
Deplacer le disque en A sur le piquet C
```

On peut objecter à cette méthode qu'elle est partie d'un petit coup de chance : nous sommes parti d'une intuition sur la forme générale de T_n à partir de l'observation des premiers termes. Ce ne sera pas toujours le cas si la forme générale de la suite est plus complexe.
Dans ce cas, on peut adopter une autre méthode de recherche.
Par exemple, en observant $T_{n+1} = 2T_n + 1$, on reconnait presque une suite géométrique de raison 2 (en fait, on introduira l'appellation « suite arithmético-géométrique » car elle tient un peu des deux).
Si on calcule $T_{n+1} + 1$, on obtient :

$$T_{n+1} + 1 = 2T_n + 1 + 1 = 2pa$$

1 1 c Jouons aux cubes

Voici un test de fin d'étude maternelle en Syldavie : prenez un cube, placez en-dessous deux autres cubes, et encore en-dessous trois cubes, etc.



Combien y a-t-il de cubes bleus au total sur le dessin ci-dessus ? On peut encore les compter à la main, mais que faire si je vous demande le nombre de cubes lorsqu'on a placé 100 rangées ? n rangées ?

Le dessin nous donne une idée : si nous complétons la figure pour former un rectangle, il y a deux fois plus de cubes, mais maintenant nous pouvons les compter. Il y en a en effet $\dfrac{4(4+1)}{2}$, et donc

$$1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}$$

Reprenons la méthode adoptée pour étudier la génétique syldave :

1. Nous allons essayer de prouver que la propriété suivante est vraie pour tout entier naturel non nul n

$$\mathcal{P}(n)\ :\ «\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ »$$

2. Il est facile de vérifier que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$, donc la deuxième étape de notre raisonnement est vérifiée

$$\mathcal{P}(1)\ \text{ est vraie}$$

3. Supposons qu'une « génération », appelons-la par exemple la k e , soit « infectée ». Plus sobrement on dira : soit k un entier supérieur à 1. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie et essayons alors de montrer que cela implique que la génération suivante , la $k+1$ e , sera elle aussi infectée, c'est à dire

$$\mathcal{P}(k)\ \text{ vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)\ \text{ vraie}$$

Il s'agit donc de calculer $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ sachant que $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, or

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \underbrace{1+2+3+\cdots+k} +(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2} +(k+1)\\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)\\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)\\
&= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie elle aussi.

4. Nous avons vérifié que la propriété était vraie au rang 1 et qu'elle était héréditaire. Nous allons donc en déduire que la propriété sera toujours vraie, quelque soit l'entier naturel non nul n grâce au théorème admis suivant

1 2 Le théorème

Théorème 7 - 1

(admis) Raisonnement par récurrence
Soit $\mathcal{P}$ une propriété dépendant d'un rang n. Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs à un certan n_0

1. On expose clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$.
2. On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie : c'est le **pas initial** de la récurrence.
3. On **suppose** ensuite que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain entier k : c'est **l'hypothèse de récurrence** et on démontre alors que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie : c'est le passage du rang k au rang $k+1$ qui exprime que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire**.
4. Il reste à **conclure** en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n

2 Suites arithmetico-géométriques

2 1 Quelques rappels...

2 1 a Suites arithmétiques

Définition 7 - 1

Suite arithmétique
Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + b$$

On appelle b la raison de la suite

Les propriétés suivantes se montrent par récurrence (faites-le !)

Propriété 7 - 1

Étant donné une suite arithmétique de raison b

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nb$
- $\sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{\text{nombre de termes}(1\text{er terme}+\text{dernier terme})}{2} = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

En particulier $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 1 b Suites géométriques

Définition 7 - 2

Suite géométrique
Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel a tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \cdot u_n$$

On appelle a la raison de la suite

Les propriétés suivantes se montrent par récurrence (faites-le !)

Propriété 7 - 2

Étant donné une suite géométrique de raison a

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot a^n$
- Si $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{premier terme} \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

3 Convergence d'une suite

3 1 Qu'est-ce qu'une suite ?

3 1 a Définition

Pour faire court, on pourrait se contenter de dire

Définition 7 - 3

Suite numérique
Une suite numérique réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

Mais développons un peu. Considérons par exemple la suite de terme général

$$u_{n+1} = \sqrt{2n+1}$$

La suite u qu'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [b] ou même (u_n) est la fonction qui, à n'importe quel **entier** n associe le **réel** $\sqrt{2n+1}$
Si ce n'est qu'une fonction, pourquoi lui avoir donné un nom spécial ?

b. c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par u_n quand n *décrit* l'ensemble $\mathbb{N}$ qu'on pourrait aussi noter $\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{1000}, \cdots, u_{197895}, \cdots\}$: on identifie ici la fonction et les valeurs qu'elle prend, ce qui se comprend car on peut « énumérer » ces valeurs

3 1 b Inerprétation physique

Enfilons une blouse : et hop ! Nous voici devenus physiciens.
Laissons tomber un objet dans un tube où nous avons au préalable fait le vide. Notons sa position chaque seconde :
$h_0 = 0\mathrm{m}$, $h_1 = 4{,}9\mathrm{m}$, $h_2 = 19{,}6\mathrm{m}$, $h_3 = 44{,}1\mathrm{m}$, $h_4 = 78{,}4\mathrm{m}$.
Avec un bon sens de l'observation, nous remarquons que

$$h_n \approx \frac{1}{2}gn^2$$

avec $g \approx 9{,}81\mathrm{ms}^{-2}$ et n le *rang* de la mesure correspondant ici au nombre de secondes écoulées depuis le début de la chute.
Nous avons ainsi tout naturellement construit une *suite* de mesures qui est en fait une suite numérique de *terme général* $h_n = 4{,}9n^2$.
Aurait-il été plus simple de noter $h(t) = 4{,}9t^2$ avec t le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres ?
Attention ! Nous avons pris des mesures chaque seconde. Rien ne nous dit qu'entre chaque mesure il ne se passe pas des choses extrèmement bizarres. Bien sûr le physicien généralisera le résultat à n'importe quelle valeur de t, entière ou non, car il a en poche des lois qui le lui permettent : il passe naturellement du *discret* au *continu* [c].
Hors d'un contexte physique, un mathématicien aura besoin d'être convaincu avant de pouvoir généraliser
Considérez par exemple la suite de terme général

$$u_n = \sin(n\pi)$$

En fait, u_n est toujours nul.
Considérez maintenant la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = \sin(t\pi)$...
Par exemple $f(1/2) = \sin(\pi/2) = 1$ donc la fonction f n'est pas nulle partout en fait.
Imaginez un physicien prenant chaque seconde des mesures d'un phénomène obéissant à cette loi [d] : il pourrait conclure qu'après avoir jeté un caillou dans l'eau, la surface reste immobile...
Pour en revenir à nos moutons, une suite numérique peut apparaître comme une « suite de mesures » à intervalle de temps régulier : garder cette image en tête pourra peut-être vous aider à mieux appréhender l'étude des suites, et l'étude des suites devrait elle-même vous aider à appréhender les propriétés des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
De manière plus abstraite, on peut aussi considérer une suite numérique comme un classement de nombres réels : on prend des réels et on leur colle un dossard.
Considérons par exemple la suite des entiers pairs :
0 a le dossard n°0
2 a le dossard n°1
4 a le dossard n°2
6 a le dossard n°3 etc.
ce qui revient à étudier la suite p_n de terme général $p_n = 2n$.
Oui mais si on prend la suite $u_n = \sin(n\pi)$, le pauvre 0 va se retrouver avec une infinité de dossards...Voici un écueil fréquemment rencontré par les valeureux pédagogues cherchant un support intuitif concret à une notion mathématique abstraite : ça peut aider, mais il faut être conscient des limites.

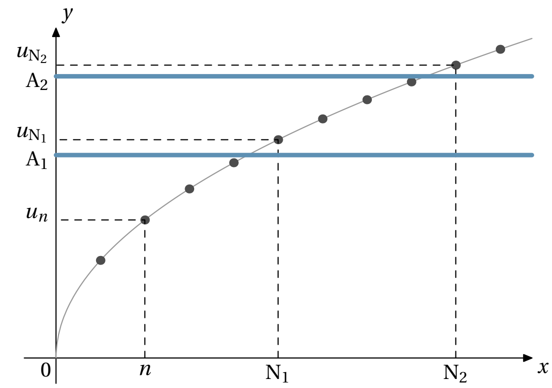
c. Ce passage du discret au continu est l'un des points forts de votre formation : nous en reparlerons tout au long de l'ouvrage, notamment au moment de la découverte du calcul intégral et des lois de probabilité à densité. Voir aussi l'annexe 1 en fin d'ouvrage
d. par exemple une onde se propageant à la surface de l'eau

3 2 Comment traduire qu'une suite diverge vers l'infini ?

Une suite est en particulier une fonction, donc la définition vues à la première leçon reste valide

Définition 7 - 4

Suite divergeant vers l'infini
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si et seulement si , pour tout réel positif A, il existe **un** entier N tel que **pour tout** entier n supérieur à N, on a $u_n > A$.



Reprenons par exemple le cas de l'objet tombant dans le vide : considérons donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $h_n = 5n^2$.
Soit A un réel positif quelconque. Nous voudrions savoir s'il existe un rang N à partir duquel les valeurs prises par la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *toujours* supérieures à A.
Il s'agit donc de résoudre **dans** $\mathbb{N}$ l'inéquation

$$(\mathrm{I}) : \ 5n^2 \geqslant A$$
$$(\mathrm{I}) \iff n^2 \geqslant A/5$$
$$(\mathrm{I}) \iff n \geqslant \sqrt{A/5} \text{ car } A \geqslant 0$$

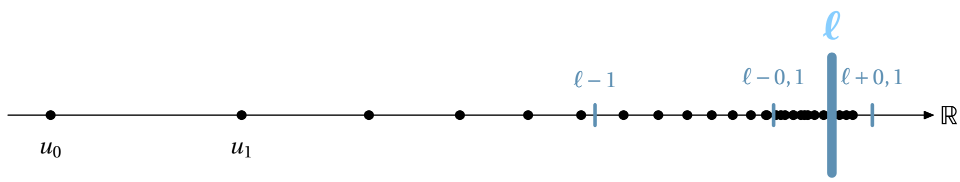
Donc, dès que n sera supérieur à $\sqrt{A/5}$, on aura h_n supérieur à A. Donc, d'après notre définition, on peut dire que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Mais attention ! $\sqrt{A/5}$ n'a aucune raison d'être un entier ! N est en fait le premier entier supérieur à $\sqrt{A/5}$.

3 3 Comment traduire qu'une suite converge ?

Adaptons ici encore le langage des limites des fonctions au cas de suites

Définition 7 - 5

Suite convergente
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**



Prenons un exemple simple : la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
On observe $v_1 = 2$, $v_2 = 3/2$, $v_{100} = 1,01$, $v_{10000} = 1,0001$: la suite semble converger vers 1.
Prenons un intervalle centré en 1 : il est de la forme $]1-\varepsilon; 1+\varepsilon[$
Résolvons alors

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}_n) : \ 1-\varepsilon < v_n < 1+\varepsilon \\
&(\mathrm{I}_n) \iff 1-\varepsilon < 1+1/n < 1+\varepsilon \\
&(\mathrm{I}_n) \iff -\varepsilon < 1/n < \varepsilon \\
&(\mathrm{I}_n) \iff 0 < 1/n < \varepsilon \text{ car } n \text{ est strictement positif} \\
&(\mathrm{I}_n) \iff n > 1/\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, quelque soit ε, c'est à dire quelque soit l'intervalle ouvert centré en 1, tous les termes v_n de la suite seront dans l'intervalle dès que n est supérieur à $1/\varepsilon$.

Les théorèmes généraux sur les limites de fonctions sont bien sûr applicables aux suites numériques : nous ne reviendrons pas dessus. Énonçons toutefois un théorème très important admis en terminale :

Théorème 7 - 2

Théorème de la limite monotone
Toute suite réelle croissante (décroissante) et majorée (minorée) est convergente

Essayez d'en déduire que toute suite croissante qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$.

4 Suites adjacentes

4 1 Que sont des suites adjacentes ?

Mathémator : Dire que deux suites sont adjacentes revient à dire qu'elles sont respectivement la suite des extrémités gauches et la suite des extrémités droites d'une suite de segments emboîtés dont la suite des longueurs tend vers 0.

Téhessin (à part) : *Ca y est, il décolle, il faut l'arrêter...* **(à voix haute)** Excusez-moi Maître, est-ce qu'on pourrait l'exprimer de manière plus simple ?

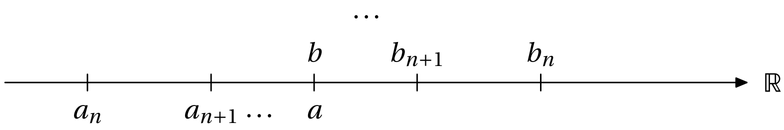
Mathémator : Si vous voulez mon brave petit Téhessin.

Définition 7 - 6

suites adjacentes
On dit que deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(b_n - a_n\right) = 0$.

Téhessin : Je comprends mieux. Et je vais vous étonner : je vais prendre une initiative et non plus écouter passivement votre évangile mathématique.
Allez hop, je fais un dessin pour illustrer la situation.



Mathémator : Et...

Téhessin : Je m'aperçois que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n, non ?

Mathémator : Vous avez raison, mais le fait que $a_n \leqslant b_n$ pour tout n est une conséquence des propriétés i), ii) et iii). En effet, sous ces conditions, la suite $(b_n - a_n)$ est décroissante, et comme elle converge vers 0, tous ses termes sont positifs ou nuls.
Mais voici le principal, qui se comprend sur le dessin et que vous devez savoir démontrer :

Théorème 7 - 3

théorème des suites adjacentes
Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

La démonstration utilise le théorème de la limite monotone.

4 2 À quoi servent les suites adjacentes ?

Mathémator : Prenons un exemple. Pour calculer des valeurs approchées du nombre e, la base du logarithme néperien, on peut utiliser le résultat classique que e est la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $\mathrm{S}_n \leqslant e$ pour tout n. Mais cela ne suffit pas à dire à quelle précision S_n est une valeur approchée de e.

Téhessin : Pour cela, il faudrait m ajorer e.

Mathémator : Oui, et c'est là que peuvent intervenir les suites adjacentes. Car si l'on trouve une suite (T_n) telle que (S_n) et (T_n) soient adjacentes, alors elles convergeront toutes les deux vers la même limite, forcément égale à e, et on aura aussi $\mathrm{S}_n \leqslant e \leqslant \mathrm{T}_n$ pour tout n. Ce qui permettra d'obtenir une valeur approchée de e à la précision souhaitée puisque $\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n$ tend vers 0.

Il reste à trouver une suite (T_n) convenable. D'autres s'en sont chargés avant nous et on montré que l'on pouvait prendre

$$\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n \cdot n!},$$

et je vous laisse le vérifier... Ce choix de T_n est particulièrement intéressant car $\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n$ tend alors très vite vers 0, ce qui permet d'obtenir une bonne précision pour des petites valeurs de n. Par exemple, puisque $1/(5 \cdot 5!) = 0{,}0016...$, on obtient une valeur approchée de e par défaut à $2 \cdot 10^{-3}$ près, à savoir

$$\mathrm{S}_5 = \frac{123}{60} = 2{,}7166666...$$

alors que, comme vous le savez tous par cœur

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240 7...$$

Téhessin : Je comprends, mais j'ai une question : une fois que l'on aura montré que (S_n) et (T_n) sont adjacentes, est-ce qu'on ne pourra pas en déduire ce que vous aviez admis tout à l'heure, à savoir que la suite (S_n) converge vers e ?

Mathémator : Que (S_n) converge, oui ! Il suffit d'appliquer le théorème des suites adjacentes. Mais attention, cela ne permettra pas de montrer que la limite de (S_n) est égale à e...

5 Suites récurrentes

5 1 Étude générale

Le but de cette section n'est pas de mener une étude exhaustive des suites récurrentes que vous mènerez peut-être l'an prochain, mais plutôt de proposer quelques pistes pour cerner les problèmes, pouvoir mener à bien quelques applications intéressantes et résoudre des exercices de Bac de plus en plus nombreux sur ce sujet. Mais retrouvons nos deux héros...

5 1 a Une relation $u_{n+1}=f(u_n)$ définit-elle toujours une suite ?

Mathémator : Précisons d'abord un peu les choses. On considère une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ainsi qu'un élément a de I. Et la question est de savoir s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = a \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = f(u_n).$$

Téhessin : Il me semble que oui ! Il suffit de définir u_1 comme égal à $f(a)$, et ainsi de suite.

Mathémator : C'est tout ce que cela vous inspire, Téhessin ? Vous êtes sûr de pouvoir continuer ?

Téhessin : Ben, oui, je pose $u_2 = f(u_1)$, puis... ! ? Ah, je vois le problème : il faudrait que f soit définie en u_1 !

Mathémator : Ce qui n'a en effet aucune raison de se produire. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 = -1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

Car, avec $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{1}{x}$, on a $g(-1) = 0$, donc g n'est pas définie en $g(-1)$.
Il faut également s'assurer qu'aucun des termes suivants ne va être égal à -1.

Téhessin : D'accord, mais si on avait pris une valeur strictement positive pour u_0, alors on aurait eu $g(u_0) > 0$, donc on pourrait définir $g(g(u_0))$ qui serait lui-même strictement positif, etc. On pourrait donc définir tous les termes de la suite.

Mathémator : Tout à fait ! Et le point clé dans ce que vous venez de dire est que $g\big(]0,1[\big) \subset]0,1[$, ce qui, avec la définition suivante, se traduit par « $]0,1[$ est stable par g ».
Cela veut donc dire que si on prend u_0 dans $]0,1[$, on est sûr que tous les termes *resteront* dans cet intervalle.

Il faudra donc travailler sur une partie de l'ensemble de définition qui soit « stable » par f, pour être sûr que tous les termes successifs de la suite puissent être « calculables ».

Définition 7 - 7

partie stable
Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On dit qu'une partie S de I est **stable par** f lorsque

$$\text{pour tout } x \in \text{S} \quad f(x) \in \text{S}.$$

Maintenant, si a est élément d'une partie S de I stable par f, alors on pourra définir $f(f(a))$ puisque $f(a) \in \text{S}$, puis $f(f(f(a)))$ puisque $f(f(a)) \in \text{S}$, etc. Il suffit donc de choisir u_0 dans S.

Définition 7 - 8

suite récurrente
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, un intervalle I stable par f et un réel $a \in \text{I}$.
On peut alors construire une suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Une telle suite ainsi définie est appelée une suite récurrente.

5 1 b Quelles sont les limites possibles d'une suite récurrente ?

Téhessin : Je sais : les limites possibles de (u_n) sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Car si $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, et si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ, et comme $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$, on a donc $\ell = f(\ell)$.

Mathémator : Pas si vite Téhessin. Êtes-vous sûr que $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$?

Téhessin : Euh... Pas tant que ça finalement, il faudrait que $\lim_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$.

Mathémator : Ce qui traduit quelle propriété de f ?

Téhessin : Il faut que f *soit continue en* ℓ.

Mathémator : J'aime mieux ça ! Mais même en supposant f continue sur I, la limite ℓ n'est pas nécessairement un point fixe de f !

Téhessin : Ah bon ! ? Alors là, je ne vois vraiment pas pourquoi.

Mathémator : La subtilité sort vraiment du cadre de la terminale. Retenez seulement que I doit être *un intervalle fermé*.
Sous toutes ces conditions, on peut effectivement affirmer que les limites possibles d'une suite récurrente sont les points fixes de la fonction.

Théorème 7 - 4

Limite d'une suite récurrente convergente
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, soit f une fonction continue de I vers I, et soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un point fixe de f.

Téhessin : Ça y est, j'ai compris ! Pour trouver la limite de (u_n), on n'a qu'à résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$ et (u_n) convergera forcément vers une solution de l'équation.

Mathémator : Pas si vite mon gars. Vous manquez de rigueur et passez à côté d'importants problèmes.
Tout d'abord, l'équation $f(x) = x$ n'a aucune raison d'admettre une seule solution : elle peut en admettre plusieurs ou même aucune.
Mais surtout, rien ne dit a priori que la suite (u_n) converge : elle pourrait très bien ne pas avoir de limite !

Téhessin : Mais s'il n'y a qu'une solution à l'équation, est-ce que (u_n) ne va pas toujours converger vers cette solution ?

Mathémator : Non !

Téhessin : Non ? Aurais-je droit à un exemple ?

Mathémator : Comment vous refuser cette faveur...Prenez par exemple la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 32u_n$$

La fonction $f : x \mapsto 32x$ admet un unique point fixe...

Téhessin : ...zéro...

Mathémator : ... et pourtant la suite ne converge pas vers 0.
En fait, en terminale, il faut surtout être capable d'avoir une intuition du résultat à partir d'un petit dessin. Nous verrons cela sur quelques exemples. Mais d'abord, nous aurons besoin, pour assurer la stabilité de f ou pour étudier ses variations, de répondre à la question suivante :

5 1 c Les inégalités concernant u_0 se conservent-elles ?

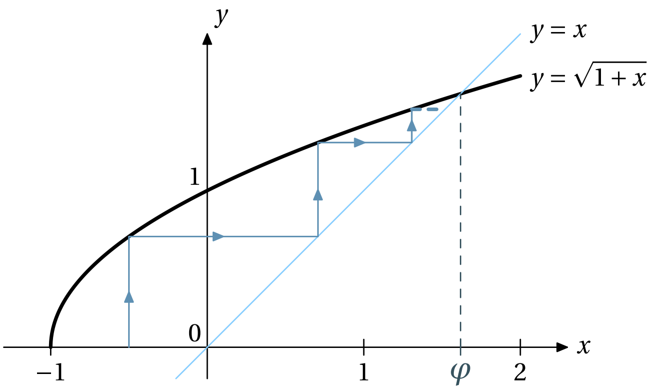
Mathémator : Commençons par étudier un exemple classique : soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1/2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On peut commencer par déterminer les points fixes de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$. On montre que le seul point fixe est $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ et même que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &> x \text{ si } x \in [-1, \varphi[, \\ \sqrt{1+\varphi} &= \varphi \\ \sqrt{1+x} &< x \text{ si } x \in]\varphi, +\infty[\end{aligned}$$

On peut alors placer les premiers termes de la suite.



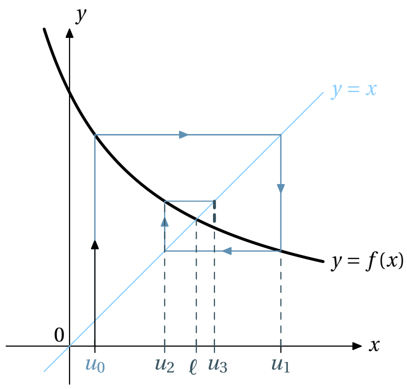
L'inégalité $a_0 < \varphi$, avec $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, se conserve. En effet, si $a_n < \varphi$ pour un certain n, alors $\sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\varphi}$, c'est-à-dire $a_{n+1} < \varphi$. On a donc montré que $a_n < \varphi$ pour tout n.
Ceci prouve que l'intervalle $[-1, \varphi[$ est stable par f. Donc

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n > 0$$

(u_n) est donc croissante et majorée par φ. Elle est donc convergente. Enfin, la fonction f étant continue sur $[-1, \varphi]$, la suite converge vers un point fixe de f, à savoir ici φ.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

Plus généralement, on peut aussi parfois déterminer le sens de variation de la suite (u_n) par « conservation d'inégalités ». Supposons par exemple que f soit croissante. Alors la position de u_0 par rapport à u_1 va déterminer le sens de variation de la suite. En effet, si $u_0 \leqslant u_1$, alors $f(u_0) \leqslant f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 \leqslant u_2$, etc : on obtient donc par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n... Et de même, $u_0 \geqslant u_1$ entraîne que la suite (u_n) est décroissante.

Si f est décroissante, les choses se compliquent un peu. Retenez que la suite des termes pairs et impairs sont monotones et de sens de variation contraires : en effet, si par exemple on a $u_0 \leqslant u_1$, on en déduit $u_1 \geqslant u_2$, puis $u_2 \leqslant u_3$, puis $u_3 \geqslant u_4$... On va donc avoir $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$ et $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout n. Le dessin suivant en coquille d'escargot vous permettra de visualiser la situation :



Enfin, si f n'est pas monotone, le comportement de (u_n) peut même être très compliqué, « chaotique ». Pour nous amuser, nous examinerons à l'aide de XCAS le comportement d'une suite telle que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mu\, u_n (1 - u_n)$$

5 1 d En résumé

Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la conservation de l'ordre par f) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- Vous serez le plus souvent amenés à prouver qu'une suite est monotone et bornée, donc convergente.
- Pour déterminer sa limite, on utilise le théorème bien connu. N'oubliez pas de vérifier toutes les conditions d'application, à savoir que la suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue de I vers I, I étant un intervalle fermé, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Pour vous aider à visualiser la situation, n'hésitez pas à faire appel à Xcas grâce à la fonction

```
plotseq( f(x),x=u0,n) )
```

6 Méthode de Newton

Les prérequis sont plus nombreux ! Il faut avoir étudié les suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et la dérivation... et ne pas être trop perdu en Analyse... Voici un exemple de TP possible en terminale.

6 1 Historique

La méthode de résolution des équations numériques que nous allons voir aujourd'hui a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exmples numériques mais la formulation est fastidieuse. Dix ans plus tard, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence. Un siècle plus tard, Mouraille et Lagrange étudient la convergence des approximations successives en fonction des conditions initiales par une approche géométrique. Cinquante ans plus tard, Fourier et Cauchy s'occupe de la rapidité de la convergence.

6 2 Principe

Newton présenta sa méthode en traitant l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.
Soit f la fonction $x \mapsto x^3 - 2x - 5$. On peut rapidement tracer son graphe à l'aide d'un outil quelconque.
Il coupe l'axe des abscisses pour une valeur comprise entre 2 et 3.
On assimile la courbe à sa tangente au point d'abscisse 2.
Celle-ci a pour équation $y = (x-2)f'(2) + f(2) = 10(x-2) - 1$
Posons $x = 2 + \varepsilon$ alors $f(2+\varepsilon) = 0 \iff \varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 10\varepsilon - 1 = 0$.
Si on assimile la courbe à sa tangente en 2, alors ε vérifie aussi $0 = 10(2+\varepsilon-2) - 1$ c'est-à-dire $\varepsilon = 0,1$.
En fait, assimiler la courbe à sa tangente, c'est négliger les termes en ε d'ordre supérieur à 1 (ici $\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2$).
Un approximation de la solution est donc 2,1.
On recommence ensuite en partant de 2,1 au lieu de 2 puis on reprendra la nouvelle valeur trouvée comme valeur de départ, etc.

6 3 La formule de récurrence

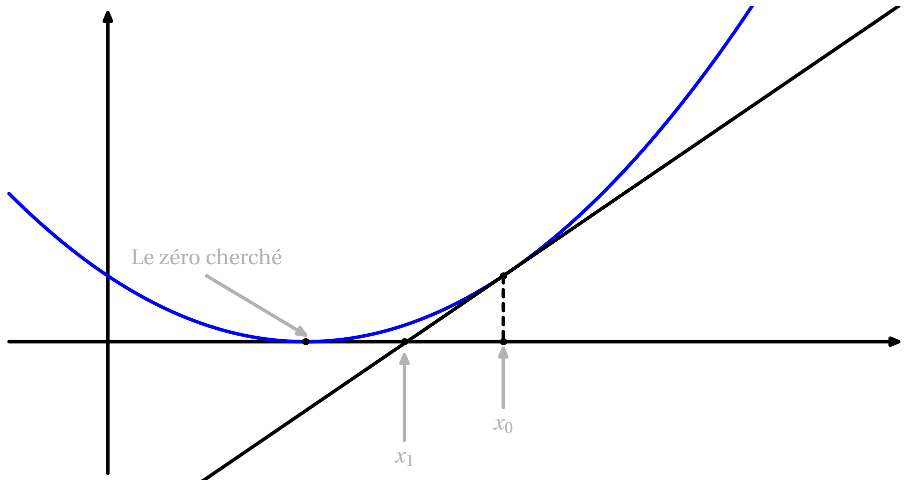
On sent la procédure algorithmique poindre son nez. Pour finir de la mettre en évidence, nous allons formaliser la méthode précédente en introduisant la suite des approximation successives.

– On part d'un nombre quelconque x_0 ;

– à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;

– et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;

– etc.



À partir de cette description graphique de la méthode de Newton, trouver la formule, notée (1), donnant x_1 en fonction de x_0, puis x_{n+1} en fonction de x_n.
Quelles hypothèses doit-on faire sur f et les x_n pour que la formule ait un sens ?

Nous n'irons pas plus loin pour l'instant concernant la convergence de ces suites. Traitons l'exemple de Newton.

6 4 Étude de la suite associée à l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

On veut résoudre l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ par la méthode de Newton-Raphson appelée aussi méthode de la tangente. On note f la fonction $x \mapsto x^3 - 2x - 5$.

1. Montrez rapidement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Montrez que $2 < \alpha < 3$.
2. Déterminez la fonction φ telle que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, la suite (x_n) étant celle décrite au paragraphe précédent en prenant $x_0 = 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la fonction φ puis celui de φ' et déduisez-en que $[\alpha, 3]$ est stable par φ et que φ est strictement croissante sur $[\alpha, 3]$.
4. Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la suite x_n ?

6 5 Test d'arrêt

Afin de construire un algorithme donnant une approximation d'une solution d'une équation numérique par la méthode de Newton-Raphson, il faudrait déterminer un test d'arrêt c'est-à-dire savoir à partir de quel rang n $|x_n - \alpha|$ restera inférieur à une valeur donnée.

Il suffit de remarquer que $f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha)$. Nous supposerons f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un « bon » voisinage I de α (ce critère nous échappe encore à notre niveau). Alors f est en particulier dérivable en α donc

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) \sim f'(\alpha)(x_n - \alpha)$$

C'est-à-dire, puisque $f'(\alpha)$ est supposé non nul :

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(\alpha)}$$

Or f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a f' continue et non nulle en α donc $f'(\alpha) \sim f'(x_n)$. Finalement

$$x_n - \alpha \sim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

Nous choisirons donc comme test d'arrêt $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| < p$ avec p la précision choisie.
Il ne reste plus qu'à écrire l'algorithme.

6 6 Algorithme récursif

D'abord l'algorithme sous forme récursive. En fait, tout a déjà été dit alors traduisons directement.

En XCAS : on notera que `function_diff(f)` renvoie la *fonction* dérivée donc `function_diff(` désigne le *nombre* dérivé de f en x_0.

```
newton_rec(f,x0,eps):={
if(evalf(abs(f(x0)/function_diff(f)(x0)))<eps){evalf(x0)}
else{newton_rec(f,evalf(x0-f(x0)/function_diff(f)(x0)),eps)}
}:;
```

Listing 7.1 – méthode de Newton-Raphson en récursif (XCAS)

Alors, après avoir fixé par exemple la précision à 100 :

```
DIGITS:=100:;
newton_rec(x->x^2-2,1.0,evalf(10^(-99)))
```

On obtient immédiatement :
`1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210`
En CAML : il y a un petit plus car il faut définir une dérivée approchée.

```
# let der(f,x,dx)=(f(x+.dx)-.f(x))/.dx;;
```

Maintenant la partie Newton :

```
# let rec newton_rec(f,xo,dx,eps)=
if      abs_float(f(xo)/.der(f,xo,dx))<eps      then      xo
    else
```

```
newton_rec(f,xo-.f(xo)/.der(f,xo,dx),dx,eps);;
```

Listing 7.2 – méthode de Newton-Raphson en récursif (CAML)

Par exemple :

```
# let k(x)=x*.x-.2.;;

# newton_rec(k,1.,0.0001,0.000000001);;
- : float = 1.41421356245305962
```

6 7 Algorithme impératif

Ça se complique un peu : évidemment, car il faut faire de l'informatique au lieu de se concentrer sur les mathématiques...

Entrées :
fonction f
précision p
premier terme $a0$
nombre maximum d'itération `// Pour les cas pathologiques`

Initialisation : $fp \longleftarrow$ dérivée de f
compteur$\longleftarrow$ 0 `// le compteur d'itérations`
$un \longleftarrow u0 - \frac{f(u0)}{fp(u0)}$
début
  tant que $\left|\frac{f(xn)}{fp(xn)}\right|$ *est plus grand que la précision p et que k* $< \mathrm{N}$ **faire**
    si $fp(un) = 0$ **alors**
      On sort de la boucle avant de diviser par zéro
    $un \longleftarrow un - \frac{f(un)}{fp(un)}$
    compteur$\longleftarrow$ compteur+1
fin
retourner *L'approximation et la valeur du compteur*

Comparez ensuite avec les résultats trouvés avec la dichotomie.
Regardez également ce qui se passe avec l'équation $(x-1)^4 = 0$: quelle précaution supplémentaire faut-il prendre ? (La preuve n'est évidemment pas envisageable au Lycée).

EXERCICES

Applications

7 - 1 Jouons...

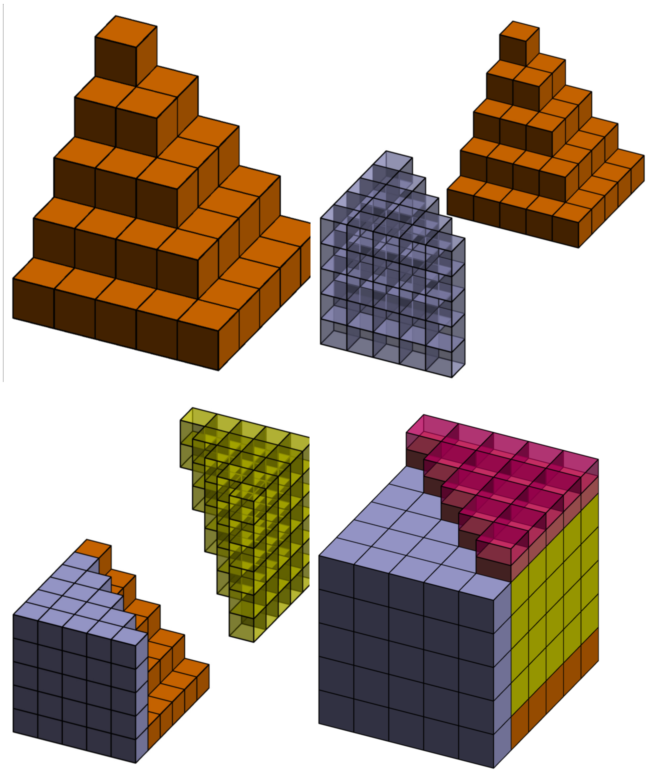
Prenons un cube, rajoutons trois autres cubes pour former un carré, puis cinq autres cubes pour former un plus grand carré, puis sept autres cubes pour former un carré encore plus grand...

Nous voulons maintenant calculer la somme des n premiers entiers impairs.

1. *Proposez une formule générale inspirée du résultat de notre petite activité de* maternelle.
2. *Démontrez la formule par récurrence.*

7 - 2 Récurrence chinoise

Que vous inspire le petit dessin suivant (il est interdit de répondre : « rien ! »)



Découverte

7 - 3 Observons...

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9 \end{cases}$$

Observez, conjecturez, prouvez.

7 - 4 Découvrons...

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

Soit α la solution de l'équation $x = 3x + 1$

- *Étudiez la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$.*
- *Déduisez zan l'expression du terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.*
- *Exprimez alors u_n en fonction de n.*

7 - 5 Généralisons...

Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

- *Pourquoi a-t-on posé $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$?*
- *Soit α la solution de l'équation $x = ax + b$. Pourquoi est-on sûr que α existe ?*
- *Étudiez la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$.*
- *Déduisez-en l'expression du terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.*
- *Exprimez alors u_n en fonction de n.*
- *Pourquoi a-t-on eu l'idée d'utiliser la solution de $x = ax + b$?*

7 - 6 Dans le même esprit...

Étudiez $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{5} \end{cases}$ *et calculez*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Mêmes questions avec $\begin{cases} u_0 = -3/2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$

Croyable mais faux !

7 - 7 Croyable mais faux !

Mathémator combat les idées reçues sur les suites : une interview exclusive.

Téhessin *: Est-il vrai qu'une suite strictement croissante diverge forcément vers* $+\infty$ *?*

Mathémator *: On pourrait le penser en effet : une suite qui ne fait que croître va forcément monter vers* $+\infty$*. Et pourtant c'est FAUX !*
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin *: Est-il vrai qu'une suite qui diverge vers* $+\infty$ *est forcément croissante à partir d'un certain rang ?*

Mathémator *: On pourrait le penser en effet : puisqu'il faut aller vers l'infini et au-delà, il va bien falloir monter sans s'arrêter. Et pourtant c'est FAUX !*
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin *: Est-il vrai qu'une suite bornée converge forcément vers un réel ?*

Mathémator *: On pourrait le penser en effet : puisque la suite est bornée, elle ne pourra aller vers l'infini, donc il faut qu'elle se stabilise quelque part. Et pourtant c'est FAUX !*
Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Téhessin *: Est-il vrai qu'une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs converge forcément ?*

Mathémator *: On pourrait le penser en effet : puisque la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle va se stabiliser sur l'une d'elle. Et pourtant c'est FAUX !*
Je vous laisse trouver le contre-exemple.

Avec les définitions.

7 - 8

On considère la suite définie par $u_n = 2 + 1/n$ *pour* $n \geqslant 1$

- *Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à* 10^{-2} *près.*
- *Observer la représentation graphique de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*
- *On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon 0,01 , c'est-à-dire* $]1,99;2,01[$ *. Montrer qu'à partir d'un certain rang* n_0 *à déterminer, tous les termes de la suite* (u_n) *appartiennent à cet intervalle.*
- *On considère l'intervalle ouvert de centre 2 et de rayon* r *, c'est-à-dire* $]2-r, 2+r[$.
  Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 *à déterminer en fonction de* r *, tous les termes de la suite* (u_n) *appartiennent à cet intervalle.*
- *Démontrer que* (u_n) *converge vers 2.*

7 - 9

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ *pour* $n \geqslant 1$.

- *Calculer les dix premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à* 10^{-2} *près.*
- *Observer la représentation graphique de la suite* (u_n) *donnée par une calculatrice ou un ordinateur. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite ?*
- *On considère l'intervalle* $]a, +\infty[$ *avec* $a \geqslant 10$.
  Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0 *à déterminer en fonction de* a*, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.*
- *Montrez que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

7 - 10

Démontrez que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

Avec les propriétés.

7 - 11

Déterminez les limites des suites de termes généraux suivants :

$$u_n = \cos n - n \qquad v_n = 2n + (-1)^n \qquad a_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n \qquad c_n = \frac{3-\cos n}{n}$$

7 - 12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de terme général*

$$u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$$

- *Conjecturez la limite de la suite à l'aide de la calculatrice*
- *Montrez que* $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+6/n}+1}$ *et déduisez-en la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

7 - 13

On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

En déterminant le plus petit et le plus grand terme de s_n*, montrez que*

$$\frac{n}{n+1} \leqslant s_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+n}$$

et déduisez-en la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 - 14 Style Bac avec ROC

Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite. On considère les propriétés suivantes

- P_1 *la suite* (u_n) *est majorée ;*
- P_2 *la suite* (u_n) *n'est pas majorée ;*
- P_3 *la suite* (u_n) *converge ;*
- P_4 *la suite* (u_n) *tend vers + ;*
- P_5 *la suite* (u_n) *est croissante.*

1. *Donner la traduction mathématique des propriétés* P_1 *et* P_4.
2. *Si les propriétés* P_1 *et* P_5 *sont vraies, que peut-on en conclure pour* (u_n) *(on ne demande pas de justifier la réponse) ?*
3. *Si les propriétés* P_2 *et* P_5 *sont vraies, que peut-on en conclure pour* (u_n) *(on ne demande pas de justifier la réponse) ?*
4. *Une suite vérifiant la propriété* P_4 *vérifie-t-elle nécessairement la propriété* P_2 *(on demande de justifier la réponse) ?*
5. *Une suite vérifiant la propriété* P_2 *vérifie-t-elle nécessairement la propriété* P_4 *(on demande de justifier la réponse) ?*

7 - 15 Encore un

Partie A Démonstration de cours
Soit (u_n) *une suite croissante non majorée.*

1. *Soit* M *un nombre réel et* n_0 *un entier naturel tel que* $u_{n_0} \geqslant \mathrm{M}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, *si* $n \geqslant n_0$ *alors* $u_n \geqslant \mathrm{M}$.
2. *Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite* (u_n) *?*
3. *Énoncer le théorème du cours ainsi démontré.*

Partie B
Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en justifiant chaque réponse :

- *Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers* $+\infty$.
- *Si une suite est croissante alors elle tend vers* $+\infty$.
- *Si une suite tend vers* $+\infty$ *alors elle n'est pas majorée.*
- *Si une suite tend vers* $+\infty$ *alors elle est croissante.*

7 - 16 Et un autre

Partie I
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :
(A) Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier* n, $v_n \geqslant u_n$ *et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.
(B) Toute suite bornée est convergente.
(C) Pour toutes suites (u_n) *et* (v_n) *à valeurs strictement positives qui tendent vers* $+\infty$, *la suite de terme général* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *converge vers 1.*
(D) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Partie II
Pour chacune des propositions de la première partie, justifier votre réponse :

- *dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.*
- *dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.*

Exercices divers

7 - 17 écriture avec ou sans symbole $\sum$.

- *Ecrire sans* $\sum$ *:*

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n,\quad \sum_{p=1}^{n} p,\quad \sum_{p=1}^{n} n,\quad \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}$$

- *Ecrire avec* $\sum$ *:*

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

7 - 18 variables de comptage.

Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(pn)=\sum_{k=1}^{n}(kn)=n\sum_{k=1}^{n}k=k\sum_{k=1}^{n}n$$

7 - 19

Calculez les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}p,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}k,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}n.$$

7 - 20 Tapis de Sierpinski : le retour

Monsieur Sierpinski[e] *avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.*
En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur Sierpinski entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

- *Faire des dessins pour bien comprendre la géométrie du tapis troué. Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur Sierpinski après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?*
- *Calculer la durée totale du festin « mitique »...*

7 - 21 Paradoxe de Zénon.

Le paradoxe suivant a été imaginé par Zénon d'Élée (490-430 Avant JC). Achille fait une course avec la tortue. Il part 100 mètres derrière la tortue, mais il va dix fois plus vite qu'elle. Quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 10 mètres. Pendant qu'Achille parcourt ces 10m, la tortue a avancé d'un mètre. Pendant qu'Achille parcourt ce mètre, la tortue a avancé de 10cm... Puisqu'on peut réitérer ce raisonnement à l'infini, Zénon conclut qu'Achille ne peut pas dépasser la tortue (Il existe une variante fléchée : avant d'atteindre sa cible, une flèche doit d'abord parcourir la moitié de la distance la séparant de la cible, puis la moitié de la distance restante et ainsi de suite...une infinité de fois, donc la flèche n'atteint jamais la cible !).
Comment peut-on dépasser ce paradoxe ?

7 - 22 Une bille qui rebondit.

Vous aurez besoin d'utiliser quelques lois physiques du programme de Terminale que nous reverrons lors de l'étude des équations différentielles

- *En chute libre verticale, l'altitude z suit la loi $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$*
- *la vitesse suit la loi $v(t) = -gt + v_0$ en coordonnées algébriques*
- *Théorème de l'énergie cinétique*

$$\mathcal{E}_C(B) - \mathcal{E}_C(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(z_B - z_A)$$

- *Une balle part d'une certaine hauteur h_0 au dessus du sol (sans vitesse initiale). Combien de temps met-elle pour arriver sur le sol (négliger les frottements) ? Quelle est son énergie cinétique lorsqu'elle arrive au niveau du sol ?*
- *On modélise le rebond de la façon suivante : lorsque la balle rebondit elle perd une certaine proportion p de son énergie cinétique (par exemple $p = 10\%$). Étant partie de la hauteur h_0, à quelle hauteur h_1 va-t-elle remonter ? Quelle est la durée t_0 entre les deux premiers rebonds ?*
- *Combien de fois la balle rebondit-elle ? Pendant combien de temps rebondit-elle ?*
- *Question subsidiaire : vous connaissez le bruit d'une bille qui rebondit, avec des rebonds de plus en plus rapprochés. Imaginez maintenant une balle qui rebondit, non plus selon le modèle ci-dessus, mais selon un autre loi. Par exemple la durée du n-ième rebond est donné par $1/n$. Que va-t-on entendre ?*[f]

7 - 23 La mouche et les trains

Deux trains partent simultanément, et à une même vitesse constante v. Le premier va de Paris à Nantes, et le second, de Nantes à Paris.
Une mouche part simultanément de Paris à vitesse $3v$ (elle suit les rails en direction de Nantes). Lorsqu'elle rencontre le train Nantes-Paris, elle fait demi-tour vers Paris. Lorsqu'elle rencontre le train Paris-Nantes, elle fait demi-tour et de dirige à nouveau vers Nantes, etc. Elle s'arrête lorsque les trains se croisent.

- *Faire un dessin dans l'espace-temps (la position en abscisse, par exemple, le temps en ordonnée)*
- *Combien de fois la mouche fait elle demi-tour ?*
- *Quelle est la longueur de chaque trajet entre deux demi-tours ?*
- *Quelle distance la mouche parcourt-t-elle après n demi-tours ?*
- *Quel temps met-elle pour parcourir cette distance ?*
- *Au bout de combien de temps les trains vont-ils se croiser ?*
- *Combien la mouche aura-t-elle fait de demi-tours ?*

e. voir exercice page 47
f. voir les résultats du problème de l'ivrogne page **??**

Suites adjacentes

7 - 24 Le fameux exercice du Bac 2005

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. *Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.*
2. *Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.*
3. *Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.*
4. *Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.*

7 - 25 Vrai ou Faux tombé au Bac

Il y a deux réponses exactes : trouvez-les !

Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. *Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.*
2. *$x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.*
3. *Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.*
4. *Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.*

7 - 26 Suites adjacentes et géométrie

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0\ B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(\mathrm{A}_n, 1) ; \mathrm{B}_n, 2)\}$.

1. *Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour A_0B_0= 12 cm.*
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?
2. *On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0 ; \vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. *Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.*
3. *Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.*
4. *On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.*

Partie C

*À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.*

7 - 27 Let's Roc

1. ***Démonstration de cours.***
   Prérequis : *définition d'une suite tendant vers $+\infty$.*
   « Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
   Démontrer *le théorème suivant :*

   Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

a. Établir que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel l, alors l vérifie la relation $l = l + e^{-l}$.

c. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

7 - 28

Simplifiez l'écriture de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$

7 - 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n}{2}+3}$

– Montrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 2.

– Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

– – Démontrez par récurrence que :

$$0 < 2 - u_n \leqslant 1/2^{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

– Déduisez-en que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7 - 30 Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle toujours une limite rationnelle ?

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$

3. En déduire que (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

4. Déduisez-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{u_n^2} \leqslant 1$.

5. Etudiez alors les variations de (u_n) et déduisez-en que cette suite est convergente.

6. Déterminez la limite ℓ de (u_n).

7. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$. Est-ce que $\ell \in \mathbb{Q}$ pour autant ? Incroyable, non ?

8. Une suite convergente de nombres rationnels a-t-elle toujours une limite rationnelle ?

9. Soit (y_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $y_n = \dfrac{2}{u_n}$

a. Montrer que (y_n) est majorée par $\sqrt{2}$ puis étudier ses variations.

b. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2}+1 \leqslant u_n + y_n \leqslant \sqrt{2}+2$

c. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant u_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{(u_n-y_n)^2}{2(u_n+y_n)} \leqslant \dfrac{(u_n-y_n)^2}{4}$

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n - y_n \leqslant (1/4)^{2^n-1}$$

e. Que peut-on dire des suites (u_n) et (y_n) ?

10. En déduire une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.

11. Comment qualifieriez-vous la convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$? Justifier.

7 - 31 Une incursion dans le programme de Math Spé...

– Calculez 3,2222222222222222222222222222222222...

– Calculez 0,32323232323232323232323232323232...

– Calculez $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \ldots$

7 - 32 Suite homographique

– On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 32$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n-1}{u_n+4}$

– Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n+4}$

– Déduisez-en que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Montrez quel'équation $x = \dfrac{2x-1}{x+4}$ admet une seule solution que l'on notera α.

– Montrez que$u_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

Montrez que la suite (v_n) est arithmétique.

– Exprimer u_n en fonction de n pour tout n.

– Étudier la convergence de la suite (u_n).

7 - 33 Vrai ou Faux

Deux affirmations parmi les quatre suivantes sont vraies

Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 1,5 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \text{ pour tou} \end{cases}$

1. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x-1$.

2. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

3. La suite (v_n) est majorée.

4. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

7 - 34 Bac

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leqslant 0{,}95 u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1{,}9$.
   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.
   d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1{,}9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
   b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7 - 35 Bac

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

   Étudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra comme unité 2 cm).
   b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
   b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
   d. Prouver qu'elle converge.
3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

En déduire sa valeur.

7 - 36 Chaos syldave

Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à ailette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves. Si l'on ne considérait que cette idéale situation, la population u de Schblurbs suivrait la loi suivante

$$u_{n+1} = \mathrm{R}u_n$$

Cette relation traduit le fait que la population de l'année $n+1$ est proportionnelle à l'année n : on applique à u_n le taux de natalité et le taux de mortalité. Le coefficient R résume ces proportions.

Il est assez aisé d'objecter au modèle précédent que l'évolution ne peut par rester proportionnelle à la population de l'année précédente : au bout d'un moment la nourriture et l'espace vital, par exemple, viennent à manquer.

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de Schblurbs à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des Schblurbs reste inférieur à un million. L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.

2. Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.
   a. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de Schblurbs avec ces hypothèses ?
3. Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
   b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
      - montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$
      - établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
   d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de Schblurbs avec ces hypothèses ?
4. Représentéz sur une feuille la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Sur un troisième graphique représentez le cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.

   Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en **1.** et **2.** en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2, ...

   En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

Bac 2009

7 - 37

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
   b. Calculer S_n en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considére la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

7 - 38

PARTIE A :

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante :

pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.
   Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.
   En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

   On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme :
   $$u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$
2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E).
   Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

PARTIE B :

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n
$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

7 - 39

PARTIE A :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. ***Restitution organisée de connaissances :***
La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} g'(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B :

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que
$u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e - 1$.

7 - 40

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer $w_{2\,009}$.

Bac 2010

7 - 41

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

7 - 42

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. *Étude de propriétés de la fonction f*

a. *Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.*

b. *Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.*

On note α la solution.

c. *Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.*

De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. *Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$*

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. *Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.*

Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

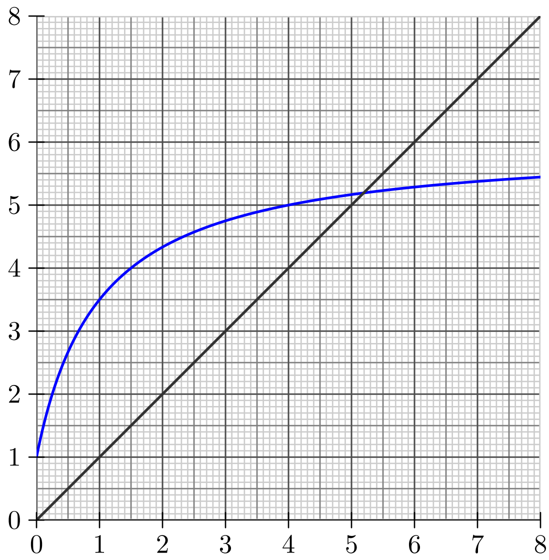
b. *Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.*

c. *En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*

3. *Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0*

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



7 - 43

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. *Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.*

2. *On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :*

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a. *Calculer v_0.*

b. *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.*

c. *En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.*

d. *Exprimer v_n en fonction de n.*

3. *On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :*

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

a. *Calculer w_0.*

b. *En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.*

c. *En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.*

d. *Exprimer w_n en fonction de n.*

4. *Montrer que pour tout entier naturel n*

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. *Pour tout entier naturel n, on pose :* $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

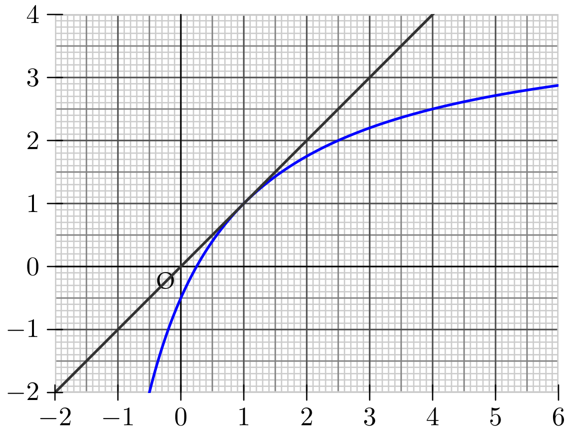
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

7 - 44

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$*, alors on a, pour tout nombre entier naturel n,* $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. a. *Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.*

   b. *Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?*

2. a. *Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.*

   b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.

3. *Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.*

   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

   a. *Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison* $\frac{1}{3}$.

   b. *Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*

   c. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

CHAPITRE

8

Équations différentielles

1 Préambule

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Elle fait intervenir la fonction-inconnue notée y, ses dérivées successives notées y', y'', $\cdots$ et des fonctions connues.
Par exemple, considérons l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2$

1. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
2. Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
3. Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x-5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
4. Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x-80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

2 Résolution de l'équation $y' = ay$

Il s'agit donc ici de déterminer *toutes* les fonctions f dérivables sur I telles que, pour tout x de I

$$f'(x) = af(x)$$

– Supposons qu'il existe une solution y et posons $z(x) = e^{-ax}y(x)$. Calculez $z'(x)$. Qu'en déduisez-vous sur z ? sur y ?.

– La démonstration précédente suppose qu'il existe une solution au problème. Est-on sûr qu'une telle solution existe (dans le cas contraire, nous serions bien embêtés car notre démonstration ne vaudrait plus rien) ?
Pouvez-vous trouver une solution particulière au problème ?

Théorème 8 - 1

solutions de $y' = ay$
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a un réel donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

3 Résolution de l'équation $y' = ay + b$

Lorsqu'un élève de T$^{\text{ale}}$S de masse m est lâché en chute libre, sans vitesse initiale, d'un avion bimoteur de fabrication malgache piloté par une ancienne nageuse est-allemande, sa vitesse $t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{k}{m}y = g$ où $k > 0$ est le coefficient de freinage et g l'accélération de la pesanteur.

Déterminez tout d'abord le réel c tel que v vérifie pour tout $t \geqslant 0$ $v'(t) = -\frac{k}{m}(v(t)+c)$
On pose alors $f(t) = v(t)+c$. Montrez que f vérifie une équation différentielle du type $y' = ay$. Déduisez-en f puis v. Interprétez physiquement le nombre $\mathrm{V} = \frac{mg}{k}$

Plus généralement, considérons l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.
Montrez que la fonction $g : x \mapsto -b/a$ est solution de (E).
Alors on a bien $g'(x) = ag(x) + b$ pour tout x.
Or une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f'(x) = af(x) + b$. Déduisez-en que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution d'une équation différentielle simple.
trouvez alors la forme générale des solutions de (E).

Théorème 8 - 2

résolution de $\mathbf{y' = ay + b}$
On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, et l'équation sans second membre associée $y' = ay$. Alors

– la fonction $g : x \mapsto -b/a$ est une solution particulière de (E)
– l'ensemble des solutions de (E) s'obtient en ajoutant à g une solution quelconque de l'équation sans second membre.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax} - b/a$

EXERCICES

8 - 1

1. *Résolvez l'équation* $(\mathrm{E}_1) : 3y' + 2y = 0$ *et tracez plusieurs solutions sur l'écran de votre calculette.*
2. *Résolvez cette même équation sachant maintenant que* $y(0) = 32$.
3. *Donnez également une solution (non identiquement nulle...) pour chacune des équations différentielles suivantes :*

$$(\mathrm{E}_2) : y' = 32y \qquad (\mathrm{E}_3) : y' = -32y$$

$$(\mathrm{E}_4) : y'' = -y \qquad (\mathrm{E}_5) : y' = 32 \qquad (\mathrm{E}_6) : y'' = 32$$

8 - 2 Vrai ou faux ?

Soit f *une fonction définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $4f' - 3f = 0$ *et* $f(0) = 1$.

1. *La courbe représentative de* f *passe par le point* A *de coordonnées* $(1, 3/4)$.
2. *La courbe représentative de* f *a, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur 1.*
3. *La fonction* f *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
4. *La fonction* f *est solution de l'équation différentielle* $16y'' - 9y = 0$.

8 - 3

Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle* I *vérifiant* $f'(x) + |f(x)| = 0$ *et* $f(1) = 1$ *en supposant que* $1 \in \mathrm{I}$.

1. *Montrez que* f *est de signe constant sur au moins un intervalle* J *centré en 1.*
2. *Trouvez une fonction répondant au problème posé sur* J.
3. *Déduisez-en l'unique fonction répondant au problème posé si* $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Équations se ramenant à $y' = ay + b$

8 - 4

$(\mathrm{E}_1) : y' - 2y = 1 - 32x$. *Montrez qu'il existe une fonction affine solution de cette équation. Déduisez-en les solutions de* (E_1).

8 - 5

$(\mathrm{E}_2) : y' = y(5 - y)$. *On cherche des solutions strictement positives solutions de cette équation différentielle. Montrez que la fonction* $z = 1/y$ *est solution d'une équation différentielle simple. Déduisez-en les solutions strictement positives de* (E_2).

8 - 6

$(\mathrm{E}_3) : y'' + 4y' + 3y = 0$ *est une équation différentielle du second ordre. On cherche les fonctions solutions de cette équation vérifiant les conditions initiales* $y(0) = 3$ *et* $y'(0) = -5$.

1. *On pose, pour tout réel* x, $z(x) = e^x y(x)$.
   a. *Calculez* $z(0)$ *et* $z'(0)$.
   b. *Montrez que* z *admet sur* $\mathbb{R}$ *une dérivée seconde et que, pour tout réel* x, $z''(x) = -2z'(x)$.
   c. *En intégrant l'égalité précédente entre 0 et* t, *montrez que* z *est solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $f' = 4 - 2f$.
   d. *Exprimez alors* $z(x)$ *en fonction de* x.
2. *Montrez qu'il existe une et une seule fonction* y *vérifiant les hypothèses de départ et exprimez* $y(x)$ *en fonction de* x.

Applications diverses

8 - 7 Style Bac avec ROC

Dans une pièce à température constante de $20\,^{o}$ *C, à l'instant initial noté 0 la température* $\theta(0)$ *d'un liquide est égale à* $70\,^{o}$ *C.*
Cinq minutes plus tard, elle est de $60\,^{o}$ *C.*
On admet que la température θ *du liquide est une fonction dérivable du temps* t, *exprimé en minutes, et que* $\theta'(t)$ *est proportionnel à la différence entre la température* $\theta(t)$ *et celle de la pièce. On notera* a *le coefficient de proportionnalité,* $a \in \mathbb{R}$.

1. ***Démonstration de cours.***
   Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.
   Prérequis : *la fonction* $x \longmapsto e^{ax}$ *est solution de l'équation (E).*
   Démontrer *que toute solution de (E) est de la forme* $x \longmapsto \mathrm{C}e^{ax}$, *où* C *est une constante réelle.*
2. *Résoudre l'équation différentielle* $y' = ay - 20a$.
3. *Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?*

8 - 8 Encore un ROC

Soit E_1 *l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle* $y' = y$.
Soit E_2 *l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle* $y'' = y$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction f qui appartient à E_2, et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. *Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{-x}$ sont des éléments de E_2.*

2. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $u = f + f'$.*

a. *Démontrer que f appartient à E_2 si et seulement si u appartient à E_1.*

b. ***Démonstration de cours.***

Prérequis : *la fonction $x \longmapsto e^x$ est solution de E_1.*

Démontrer *l'unicité de la fonction u élément de E_1 qui vérifie $u(0) = 1$.*

3. *Soit f un élément de E_2. Ou pose, pour tout réel x, $g(x) = f(x)e^x$.*

a. *Démontrer que si f vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.*

b. *Démontrer qu'il existe une seule fonction f répondant au problème posé et déterminer son expression.*

8 - 9 Circuit RL

E, une bobine d'inductance L et une résistance R. L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes et est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{D})\ :\ \mathrm{L}i'(t) + \mathrm{R}i(t) = \mathrm{E}$$

L est exprimée en henrys, R en ohms et E en volts. On donne $\mathrm{L} = 0,2\mathrm{H}$, $\mathrm{R} = 100\Omega$, $\mathrm{E} = 10\mathrm{V}$.

Écrivez et résolvez l'équation différentielle (E) en sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant est nulle. Quelle est la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

8 - 10 SSSSSSShhhhhh........BOUM

Les élèves de TS 6 préparent l'invasion du Château de Rezé. Un commando parachutiste est formé et dirigée par une élève de la classe. Afin d'optimiser le saut, ils ont modélisé le saut de la manière suivante : un élève de masse m est lâché (comme d'habitude) en chute libre, sans vitesse initiale (on négligera la vitesse due au coup de pied de lancement) d'un avion bimoteur de fabrication malgache piloté par une ancienne nageuse est-allemande. Il est soumis à la force de la pesanteur $m\overrightarrow{g}$ et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On note $z(t)$ l'altitude du parachutiste en fonction du temps.

a. $m\overrightarrow{v} = \Sigma\overrightarrow{\text{Forces}}$

On utilisera les valeurs numériques suivantes : $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$, $m = 80$ kg et $k = 14\ \mathrm{kgs}^{-1}$.

1. *En appliquant la Relation Fondamentale de la Dynamique*[a]*, déterminez l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$*

2. *Déterminez la vitesse limite théorique du parachutiste. Sachant que le parachutiste quitte l'avion à vitesse nulle, déterminez le temps mis pour atteindre 90% de cette vitesse limite ainsi que la distance parcourue pendant ce temps. Même question avec 99% de la vitesse limite.*

3. *Lorsque le parachutiste ouvre son parachute, le coefficient de frottement est multiplié par 20. Il doit arriver au sol avec une vitesse inférieure à $6\ \mathrm{ms}^{-1}$. En supposant qu'il chute à la vitesse limite au moment de l'ouverture du parachute, déterminez l'altitude maximale d'ouverture du parachute (on considèrera que le parachute met 2 secondes à se déployer et que pendant ce laps de temps, le parachutiste conserve la vitesse limite).*

8 - 11 Errare uranium est

On rappelle la loi de désintégration des noyaux radioactifs

$$\mathrm{N}'(t) = -\lambda\mathrm{N}(t)$$

où $\mathrm{N}(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant t. On note $\tau = 1/\lambda$ le temps caractéristique.

1. *Exprimez en fonction de τ la demi-vie $t_{0,5}$, temps au bout duquel $\mathrm{N}(t)$ a diminué de moitié.*

2. *Pour remédier aux problème du recyclage des déchets nucléaires, certains pays ont eu la lumineuse idée de fabriquer des obus à l'uranium appauvri et de les faire exploser sur des populations éloignées : on se débarrasse ainsi d'uranium peu rentable, on fait exploser les chars ennemis, sous l'effet de la chaleur de l'explosion l'uranium et ses dérivés se transforment en micro-poussières insolubles facilement assimilables par les poumons ennemis et amis. Il faut environ 4,5 milliards d'années pour que la moitié de l'uranium 238 (principal composant de l'UA) disparaisse. Quelle est la constante radioactive de $^{238}\mathrm{U}$?*

3. *Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, il se désintègre avec une demi-vie de 5730 ans. Un archéologue martien découvre un fragment de pompier ukrainien contenant 71% de sa quantité initiale de C_{14}. En quelle année l'archéologue a-t-il fait sa découverte ? (On rappelle que la centrale de Tchernobyl a explosé en avril 1986).*

8 - 12 Modèle de Verhulst

Notre ami belge a modélisé vers 1840 la croissance d'une population dans un milieu clos (bactéries, lapins sur une île déserte, profs dans l'Éducation Nationale etc.). La croissance est bien exponentielle au départ comme l'avait suggéré Malthus, mais une trop forte concentration crée certains problèmes : rareté de la nourriture, promiscuité, consanguinité, alcoolisme, perte des valeurs occidentales etc.

On suppose qu'une population ne peut dépasser une valeur maximum et on note $f(t)$ la fraction de ce maximum à l'instant t. On peut alors montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\quad y' = \lambda y(1-y)$$

1. *Résolvez* (E) *en introduisant $z = 1/y$.*
2. *Sachant que $\lambda = 0{,}1$ et que $f(0) = 0{,}01$, exprimez $f(t)$ en fonction de t et représentez graphiquement la fonction f. Vous obtiendrez une « courbe logistique », que l'on retrouve dans la description de nombreux phénomènes plus où moins naturels.*

Un peu de culture : l'étude des suites logistiques du type $u_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$ (voir aussi l'autre exercice les concernant page **??***) montre que si $\lambda \leqslant 1$, la population s'éteint, si $1 < \lambda \leqslant 3$, la population se stabilise autour de $1 - 1/\lambda$, entre 3 et une valeur proche de 3,57 on observe une périodicité des valeurs de la population avec un doublement de la période pour des valeurs de λ de plus en plus rapprochées ; au delà de cette valeur limite, l'évolution de la population devient totalement imprévisible, car un changement infime de la valeur de λ modifie complètement les valeurs de la suite. Tout ceci a été mis en évidence à partir de 1972. On pourrait en dire beaucoup plus, mais...*

8 - 13 Modèle de Gomperz

Pour décrire l'évolution d'une population en extinction (élèves choisissant la spécialité mathématique, élèves offrant des chocolats à leur GP, etc.), l'illustre Gomperz a proposé en 1925 le modèle suivant.

Si $g(t)$ est le nombre d'individus en vie à l'instant t, alors g vérifie l'équation différentielle (G) *:*

$$y'(t) = -k\,y(t)\Big(h - \ln\big(y(t)\big)\Big)$$

où k et h sont des constantes positives liées à la population étudiée. Le nombre t représente le temps et sera positif ou nul dans tout ce qui suit. Enfin g' représente la vitesse de « croissance » (... !) de la population à l'instant t.

On pose $z = \ln(y)$. Montrez que z est solution d'une équation différentielle (E_2) *linéaire à coefficients constants puis résolvez cette équation. Déduisez-en $y(t)$.*

8 - 14 Vitesse angulaire d'un moteur à aimant permanent

Qui est qui ?

- *$t \mapsto u(t)$ représente la tension d'alimentation du moteur*
- *$t \mapsto i(t)$ représente l'intensité du courant qui traverse le moteur*
- *$t \mapsto \gamma(t)$ représente la vitesse angulaire du moteur*
- *Ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$, de plus γ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$*
- *La résistance $\mathrm{R} = 2\Omega$*
- *La charge entraînée par le moteur présente un moment d'inertie $\mathrm{J} = 10^{-3}\,kg.m^2$*
- *Les frottements et les pertes magnétiques se traduisent par un couple proportionnel à la vitesse angulaire. Le coefficient de proportionnalité est $f = 4\cdot 10^{-5}n.m.rad^{-1}.s$*
- *La constante de couple est $k = 4\cdot 10^{-2}\mathrm{V}.rad^{-1}.s$*

L'application des lois sur les moteurs montre que sur $\mathbb{R}^+$, on a les relations

$$\begin{cases} u(t) &= k\gamma(t) + \mathrm{R}i(t) \\ ki(t) &= \mathrm{J}\gamma'(t) + f\gamma(t) \\ \gamma(0) &= 0 \end{cases}$$

1. *Montrez que la vitesse angulaire vérifie le système*
$$\begin{cases} \gamma'(t) + \left(\dfrac{\mathrm{R}f + k^2}{\mathrm{JR}}\right)\gamma(t) = \dfrac{k}{\mathrm{JR}}u(t) \\ \gamma(0) = 0 \end{cases}$$
Déduisez-en un nouveau système (S) *vérifié par γ en utilisant les données numériques.*
2. *On alimente à présent le moteur avec une tension constante $u(t) = 5$ pour $t \in [0, +\infty[$. Résolvez alors le système* (S).
3. *On appelle temps de réponse à 5% le nombre t_{r_1} défini par*
$$\gamma(t_{r_1}) = \frac{95}{100}\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)$$
Déterminez une valeur numérique de t_{r_1} à 10^{-2} près.

Bac

8 - 15

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

a. *Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.*

b. *Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

c. *Étudier les variations de la fonction f.*

Partie B

1. *On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle*

$$(E_1) y' = \frac{y}{4}.$$

a. *Résoudre l'équation différentielle (E_1).*

b. *Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.*

c. *Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?*

2. *En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :*

$$(E_2)\begin{cases} u'(t) &= \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \quad \forall t \geqslant 0 \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. *On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions*

$$(E_3)\begin{cases} h'(t) &= -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \quad \forall t \geqslant 0 \\ h(0) &= 1. \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. *Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.*

c. *Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?*

8 - 16

Dans un plan muni d'un repère orthononnal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f et f' ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de $\mathcal{T}$ est de la forme : $\mathrm{Y} = f'(x)[\mathrm{X} - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire

1. *Montrer que $\mathcal{T}$ coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse $\mathrm{X_T}$ vérifie :*

$$\mathrm{X_T} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

2. *Montrer que $\mathcal{T}$ coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée $\mathrm{Y_T}$ vérifie :*

$$\mathrm{Y_T} = f(x) - xf'(x).$$

II. *k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $x - \mathrm{X_T}$ est constante, et égale à k, pour tout nombre réel x. (Propriété 1)*

1. *Démontrer que f vérifie la propriété 1 si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{1}{k}y$$

2. *En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminer pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.*

III. *k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $y - \mathrm{Y_T}$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$. (Propriété 2)*

1. *Démontrer que f vérifie la condition posée si et seulement si f vérifie l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{k}{x}.$$

2. *En déduire la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminer pour $k = \dfrac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.*

8 - 17

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. *On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle (E_λ) : $y' = y^2 + \lambda y$ et la condition $y(0) = 1$.*
   On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$: $z = \dfrac{1}{y_0}$
   Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.
2. ***Question de cours***
   PRÉ-REQUIS
   Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.
   a. *Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'_λ) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.*
   b. *Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.*

   On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.
3. **a.** *Démontrer que* $\ln(1+\lambda) > \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$.
   On pourra étudier sur $]0\,;\,1]$ la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.
   b. *En déduire que* $\dfrac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \dfrac{1}{2}$.
4. *En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.*
   Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

8 - 18

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \quad \text{pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{et pour tout entier naturel} \quad n,\ y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1. **a.** *Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau suivant :*

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8	1,472					

   Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
   b. *Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.*
   c. *D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?*
2. **a.** *Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0\,;\,2]$ alors $p(x) \in [0\,;\,2]$.*
   b. *Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.*
   c. *Étudier le sens de variation de la suite (y_n).*
   d. *La suite (y_n) est-elle convergente ?*

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ et $\left(\mathcal{C}_g\right)$ sa courbe représentative.

1. *Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).*
2. **a.** *Montrer que $\left(\mathcal{C}_g\right)$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.*
   b. *Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.*
3. *Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\left(\mathcal{C}_g\right)$ à l'origine.*
4. *Tracer, dans un repère orthonormal d'unité 5 cm la courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.*

8 - 19

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. *On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.*

- **a.** *Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
- **b.** *Calculer la fonction dérivée de la fonction g.*
- **c.** *En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.*
- **d.** *On considère l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.*

2. ***Question de cours***

- **a.** *On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque*
- **b.** *Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.*

3. *Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.*

8 - 20

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :
(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.
- **a.** *Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.*
- **b.** *Calculer $f(0)$.*

2. *En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :*
(4) pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

3. *On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.*

- **a.** *Calculer $u(0)$ et $v(0)$.*
- **b.** *Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.*
- **c.** *En déduire les fonctions u et v.*
- **d.** *En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.*

4.
- **a.** *Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.*
- **b.** *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*

5.
- **a.** *Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.*
- **b.** *Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).*

8 - 21

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ :\qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1.
- **a.** *Démontrer que si f est solution de* (E) *alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle* (E') : $y' = 2y + 8$.
- **b.** *Démontrer que si h est solution de* (E') *alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de* (E).

2. *Résoudre* (E') *et en déduire toutes les solutions de* (E),

3. *Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle* (E) *dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser.*

8 - 22

1. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$2y' + y = 0 \quad (E),$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. *On considère l'équation différentielle :*

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

- **a.** *Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (E').$$

- **b.** *Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E′).

3. *Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.*

4. *Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.*

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

  a. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ.

  b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

8 - 23

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à [0 ; 30], on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ; 30] est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \dfrac{1}{y}$.
Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) &= 0,01 \\ y' &= 0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions

$$\begin{cases} z(0) &= 100 \\ z' &= -0,5z + 0,05 \end{cases}$$

2. **a.** En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

  b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

8 - 24

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t.
f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2} f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220° C.

2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

  a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

  b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
  En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

  c. Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 7]$.

3. **a.** Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50° C. On laissera apparents les traits de construction.

  b. Retrouver ce résultat par le calcul.

CHAPITRE

9

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Où les mathématiques rejoignent l'alchimie : guidés par la Force, nos héros transforment les produits en somme, créent de nouvelles fonctions. On touche au divin...

1 Différentes définitions

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) mais nous aboutirons malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.

1 1 Cherchons des fonctions vérifiant f(a x b)=f(a)+ f(b)

Historiquement, le logarithme népérien a été pour la première fois mis en évidence par l'Écossais John Napier (en français Jean Néper..) au tout début du XVII^e siècle. Afin de faciliter la vie des astronomes, navigateurs, financiers de l'époque qui étaient confrontés à des calculs...astronomiques, John rechercha une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables. Il a donc été amené à résoudre une *équation fonctionnelle*, *i.e.* il a recherché les fonctions f vérifiant $f(ab) = f(a) + f(b)$ Il a pu alors établir des Tables de logarithmes, complétées au fil des ans par des potes mathématiciens (nous verrons comment ils ont pu se débrouiller en exercice). À partir de deux nombres a et b, on lit sur les Tables leurs logarithmes $\ln a$ et $\ln b$; on calcule facilement $\ln a + \ln b$ qui est égal à $\ln ab$, puis on cherche sur les Tables le nombre qui admet pour logarithme $\ln ab$ et qui est bien sûr ab.

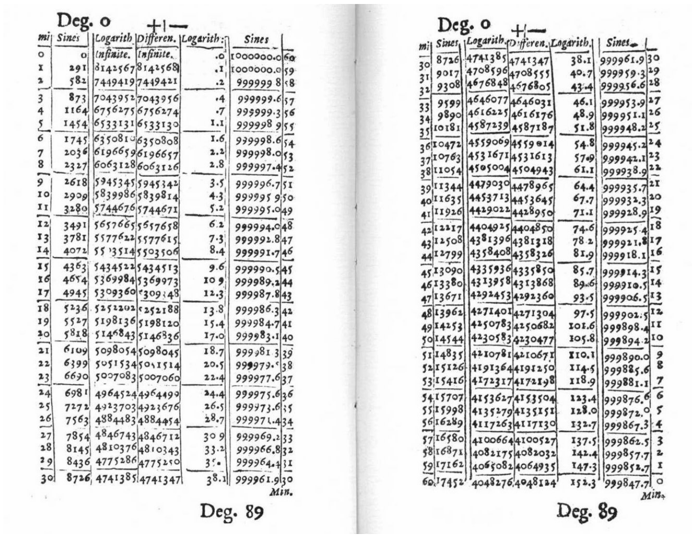
1 2 Existe-t-il des primitives de $x \mapsto 1/x$?

Autre problème : nous connaissons des primitives des fonctions qui à x associent respectivement x^2, x^1, x^0, x^{-2}, x^{-3}, etc. Vous avez tout de suite remarqué que nous avons oublié quelqu'un : quelles peuvent être les primitives de la fonction qui à x associe $x^{-1} = 1/x$? Une rapide enquête mathématique nous conduit à trouver qu'il s'agit en fait de fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle du copain John. Nous le verifierons là encore en exercice, et c'était l'approche au programme jusqu'à l'année dernière.

1 3 Quelle est la réciproque de la fonction exponentielle ?

Cette année, comme d'habitude, nous roulons pour le nucléaire. Nous avons déjà défini une fonction obéissant à la *loi de décomposition radioactive*, à savoir la fonction exponentielle. Mais de nouveaux problèmes se posent au moment de construire de nouvelles centrales : dans combien de milliards d'années les habitants de Tchernobyl ne risqueront plus d'attraper un cancer de la thyroïde en ingérant les légumes irradiés de leurs potagers. Le Physicien est alors amené à résoudre une équation d'inconnue y du type $e^y = 32$ Quel est donc ce y dont l'exponentielle vaut 32 ? Fabrice Couenne, célèbre physicien du XXI^e siècle, vous a déjà donné la réponse : on l'appelle $\ln 32$.

Voici un extrait des tables de logarithmes publiées au début du XVII^e siècle par John Napier himself :



Deg. 0 + | —

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith:	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999.8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998.9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995.9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	5503514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10.9	999989.2	44
17	4945	5309360	5309348	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981.3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.5	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30.9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	35.[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
						Min.

Deg. 89

Deg. 0 + | —

mi	Sines	Logarith.	Differen.	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
						Min.

Deg. 89

2 Construisons le logarithme

Mathémator : Aujourd'hui, cher disciple, nous allons construire pas à pas une nouvelle fonction pour combler d'horribles trous noirs de l'univers, car nous allons enfin donner une primitive à la fonction inverse, une réciproque à la fonction exponentielle, une solution à l'équation fonctionnelle $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Comme l'a déjà fait un collègue à partir de la côte d'Adam, tels des dieux de l'esprit, nous allons créer de nouveaux êtres à partir de la solitaire fonction exponentielle !

Téhessin (à part) : *Je me demande des fois si un bon coup de sabre laser sur la tête...**tout haut** Que la Force de l'Esprit soit avec nous !*

Mathémator : Vous avez déjà fait le lien entre la primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 et les fonctions qui « transforment les produits en somme ». Mais les maîtres de l'Empire ont choisi une troisième voie, la fonction exponentielle, que nous allons relier aux deux premières.
Premier problème : la fonction exponentielle admet-elle une réciproque ? Et d'abord, qu'est-ce que la réciproque d'une fonction ?

Téhessin : Si une fonction f envoie un nombre x vers un nombre y, sa réciproque f^{-1} permet de renvoyer y vers x.

Mathémator : Pouvez-vous me donner un exemple ?

Téhessin : La fonction carrée envoie 2 vers 4 et la fonction racine carrée renvoie 4 vers 2.

Mathémator : Pour reprendre votre exemple, tout nombre réel admet un et un seul carré, donc la « transformation » $x \mapsto x^2$ est bien une fonction sur $\mathbb{R}$. Mais il y a des problèmes pour revenir en arrière : certains nombres sont les carrés de deux réels comme 4, d'un seul comme 0 ou même d'aucun comme -32. On ne peut donc pas toujours définir une fonction « retour » : n'oubliez pas en effet que par définition, une fonction numérique fait correspondre à un réel de l'ensemble de définition un UNIQUE réel.
En fait, on a cherché à résoudre une équation d'inconnue x du type $x^2 = a$ qui peut admettre selon la valeur de a deux, une, voire aucune solution réelle.

Connaissez-vous un moyen de s'assurer qu'une équation du type $f(x) = a$ admet une unique solution sur un ensemble donné ?

Téhessin : Vous me prenez pour un rigolo : le théorème de LA valeur intermédiaire bien sûr !

Mathémator : J'ai du mal à réaliser à quel point la Force est en vous. Vous allez donc pouvoir relier tout ceci à la fonction exponentielle.

Téhessin : La fonction exponentielle est *continue* et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Donc, pour tout réel *a strictement positif*, l'équation $\exp(x) = a$ admet une unique solution réelle.

Mathémator : Si je résume, à tout réel *strictement positif* x on peut associer un *unique* réel y tel que $x = \exp(y)$. On notera ce réel $\ln x$ (logarithme népérien de x) et nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème 9 - 1

définition du logarithme népérien
La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien. On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors,

$$\text{pour tout } x > 0,\ e^{\ln x} = x \quad \text{et} \quad \text{pour tout réel } x,\ \ln e^x = x$$

Téhessin : Je ne vois toujours pas le lien avec les primitives de la fonction inverse et l'équation fonctionnelle.

Mathémator : Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous admettrons cette année que sa réciproque est dérivable. Donc ln est dérivable sur $]0,+\infty[$. Notons provisoirement $\ln'$ sa dérivée. Nous savons juste que $\exp(\ln x) = x$. Essayez d'en déduire une expression de $\ln' x$.

Téhessin : Pour obtenir $\ln'$, il faudrait dériver quelque chose. Or nous n'avons qu'une relation à nous mettre sous la dent, donc je vais dériver chaque membre de l'égalité $\exp(\ln x) = x$.
J'obtiens $\ln' x \exp(\ln x) = 1$ et donc $\ln' x = 1/x$...Bingo ! Le lien est fait : ln est une primitive de la fonction inverse.

Mathémator : Pas si vite mon petit Téhessix. Nous avions considéré lors de notre échauffement LA primitive de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ *qui s'annule en 1*. Pouvez-vous me confirmer que $\ln 1 = 0$?

Téhessin : Sur la machine oui, mais je ne vois pas comment calculer une valeur particulière d'une fonction dont on ne connait rien.

Mathémator : Ou plutôt pas grand chose, mais c'est suffisant. Utilisez la seule relation que vous connaissiez en introduisant 1.

Téhessin : Si vous le dîtes. Alors $\exp(\ln 1) = 1$...

Mathémator : Donc $\exp(\ln 1) = \exp(0)$, or la fonction exponentielle est une bijection car elle est continue et strictement croissante.

Téhessin : Bijection, qu'est-ce que ça veut dire ?

Mathémator : Ça veut dire en particulier que $f(x) = f(y) \iff x = y$, donc ici

$$\exp(\ln 1) = \exp(0) \iff \ln 1 = 0$$

Téhessin : Cette fois-ci on peut relier la fonction ln à la fonction inverse et à l'équation fonctionnelle. J'ose même vous devancer en énonçant les propriétés.

Propriété 9 - 1

sens de variation
La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\ln'(x) = 1/x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
On en déduit que la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Propriété 9 - 2

relation fondamentale
Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, on a

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

De plus

$$\ln 1 = 0$$

Mathémator : Cette dernière propriété va vous permettre, pendant vos temps libres, de mettre en évidence quelques autres résultats bien pratiques :

Propriété 9 - 3

propriétés algébriques

$$\ln(1/a) = -\ln a \qquad \ln(a/b) = \ln a - \ln b \qquad \ln a^p = p\ln a \quad \text{avec } p \in \mathbb{Q}$$

Occupons-nous maintenant des propriétés analytiques du logarithme, en particulier, allons voir ce qui se passe à l'infini.

Mais nous avons beaucoup réfléchi, alors je vous propose un petit jeu sous forme d'énigme pour nous détendre : un cloporte se promène sur le graphe de la fonction ln tracé dans un repère orthonormé d'unité le centimètre. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une hauteur de 30 cm sachant que sa vitesse est de $1cm.s^{-1}$?

Téhessin (à part) : *Voilà un gars qui sait s'amuser !* ***tout haut :*** *euh...quel jeu distrayant, maître ! Voyons, le problème revient à résoudre l'équation* $\ln x = 30$*, c'est à dire* $x = e^{30}$*, ce qui donne environ 107 millions de kilomètres. Il lui faudra donc à peu près 3386 siècles sans compter ses pauses-jeu.*

Mathémator : Ah, ah, ah, cette blague me fera toujours rire.

Téhessin (à part) : *Pauvre homme...*

Mathémator : Bon, fini de rire. Vous vous rendez compte que la fonction ln n'est pas bien vaillante.

Téhessin : En fait, je l'imagine mal monter vers l'infini et au-delà.

Mathémator : Résumons-nous : nous savons que ln est strictement croissante, donc que peut-on dire de son comportement asymptotique, c'est à dire à l'infini ?

Téhessin : Vous m'avez déjà mis en garde à ce sujet : si ln est bornée, alors elle admet une limite finie, sinon elle tend vers $+\infty$. Le problème revient donc à savoir si ln est bornée sur $]0,+\infty[$.

Mathémator : Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\ln x < A$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Cela voudrait dire que $x < e^A$ pour tout $x > 0$ ce qui est pour le moins absurde ! Il suffit de choisir $x = e^A + 32$.

Ainsi ln n'est pas bornée et donc

Propriété 9 - 4

limite à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

Occupons-nous maintenant de ce qui se passe du côté de l'autre borne de l'ensemble de définition, au voisinage de zéro. Il n'y a pratiquement rien à faire connaissant les propriétés algébriques de ln et en vous inspirant de ce que nous avions fait pour déduire la limite en $-\infty$ de exp connaissant sa limite en $+\infty$.

Téhessin : Ben si x tend vers 0, alors $1/x$ tend vers $+\infty$ et $\ln(1/x) = -\ln x$. En fait, si on remet tout dans l'ordre

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} 1/x = +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1/x) = +\infty$$

Or $\ln(1/x) = -\ln x$, donc finalement

Propriété 9 - 5

limite en zéro

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Mathémator : Très bien. Il ne reste plus qu'à régler un dernier détail : ln croît vers $+\infty$, certes, mais très, très lentement. À votre avis, que se passe-t-il au voisinage de $+\infty$ pour $\dfrac{\ln x}{x}$?

Téhessin : La fonction ln ne va pas peser grand chose face aux fonctions monômes : le rapport va sûrement tendre vers zéro.

Mathémator : Votre intuition est bonne. Il suffit en fait d'étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$ pour conclure que

Propriétés 9 - 6

croissances comparées

D'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel n non nul

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Téhessin : Vous parlez de mon intuition, mais un détail me turlupine : la dérivée de ln tend vers 0 en $+\infty$. J'aurai donc envie de dire que ln se « stabilise » à l'infini puisque sa pente tend vers zéro : elle devrait donc être majorée à linfini, pourtant nous avons montré qu'elle ne l'était pas.

Mathémator : Encore une fois, vous m'impressionez Téhessin. En effet, nous aurions tendance à penser qu'une fonction f vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ admette une asymptote horizontale. Malheureusement, les outils permettant de vous prouver que ce n'est pas toujours vrai ne sont plus au programme de Terminale, donc patience... Néanmoins, retenez que des conjectures qui paraissent évidentes peuvent s'avérer fausses lorsqu'on se trouve trop près de l'infini.

Téhessin : Après ces paroles, mon cours de philo va me paraître bien fade...

Mathémator : Une dernière petite limite avant de vous laissez affronter seul (mais je serai toujours à vos côté grâce à la Force) les épreuves, un dernier petit défi. Que pensez-vous de la limite en zéro de $\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Téhessin : Argh, une forme indéterminée, vous ne me ménagez pas.

Mathémator : oui mais il s'agit d'une limite en une valeur finie. Laissez dériver votre pensée...

Téhessin : Nom de Zeus ! Bien sûr ! Introduisons $f : x \mapsto \ln(x+1)$ et calculons sa dérivée en 0.

Mathémator : Vous êtes décidément prêt mon jeune disciple.

Propriété 9 - 7

limite en zéro et taux de variation

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

3 Logarithmes et exponentielles d'autres bases

Définition 9 - 1

puissance réelle (exponentielles de base quelconque)
Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$

Définition 9 - 2

logarithme décimal

La fonction $\log : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ définie pour $x > 0$ est appelée **fonction logarithme décimal**

4 Construction du graphe avec la méthode d'Euler

Construisons une approximation du graphe de ln sachant que la dérivée de ln est la fonction inverse et que $\ln 1 = 0$
Rappelons brièvement le principe de la méthode.
On utilise le fait que $\frac{1}{x} = f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Alors

$$f(x+h) \approx h \cdot \frac{1}{x} + f(x)$$

La traduction algorithmique est alors directe.

```
EulerLn(x,y,xlimite,h,liste_points):={
if(h>=0)then{condition:=x>=xlimite}else{condition:=x<=xlimite}
```

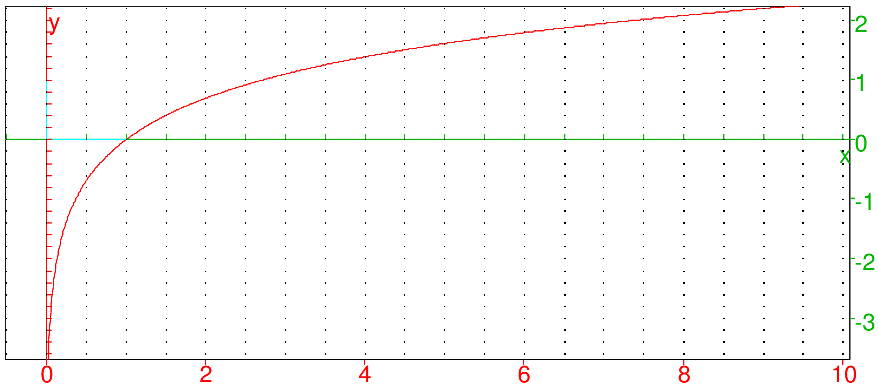
```
if(condition)
   then{liste_points}
   else{ EulerLn(x+h,y+h/x,xlimite,h,[op(liste_points),[x,y]])}
}:;
```

Puis pour le tracé :

```
trace_EulerLn(xo,yo,xlimite,h):={
polygonplot([EulerLn(xo,yo,xlimite,h,[])])
}:;
```

Ce qui donne pour le tracé sur $[0,01;10]$:

```
trace_EulerLn(1,0,10,0.01),trace_EulerLn(1,0,0.01,-0.01)
```



EXERCICES

Exercices sur la définition des logarithmes

9 - 1 Ln comme primitive de la fonction inverse

Oublions tout ce que nous savons sur la fonction ln. Appelons L *la primitive sur* $]0,+\infty[$ *de la fonction* $x \mapsto 1/x$ *qui prend la valeur 0 en 1. Notre but est de démontrer que* L *vérifie l'équation fonctionnelle de John.*
Pour cela nous allons introduire un réel $a>0$ *et la fonction* $f\ :\ x \mapsto \mathrm{L}(ax)$ *définie sur* $]0,+\infty[$

1. *Montrez que* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et calculez* $f'(x)$ *en fonction de* x.
2. *Déduisez zan qu'il existe un réel* k *tel que pour tout* $x>0$, $f(x)=\mathrm{L}(x)+k$.
3. *Montrez finalement que pour tout* $x>0$, $\mathrm{L}(ax)=\mathrm{L}(a)+\mathrm{L}(x)$.

9 - 2 Le problème de John

Nous allons rechercher les fonctions f *telles que*

- f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$
- $f'(1)=1$
- *pour tous réels* $a>0$ *et* $b>0$, $f(ab)=f(a)+f(b)$

1. *Calculez* $f(1)$.
2. *Soit* $a>0$ *un réel fixé. On définit sur* $]0,+\infty[$ *la fonction*
$$g_a\ :\ x \mapsto g_a(x)=f(ax)-f(x)$$
Montrez que g_a *est constante.*
3. *Montrez que* g_a *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et calculez* $g_a'(x)$.
4. *Il ne vous reste plus qu'à remarquer que* $g_a'(1)=af'(a)-f'(1)$ *pour en déduire que* f *est la primitive de* $x\mapsto 1/x$ *sur* $]0,+\infty[$ *qui s'annule en 1.*

9 - 3 Tables

En utilisant uniquement les résultats $\ln 2 \approx 0{,}693$ *et* $\ln 5 \approx 1{,}610$, *donnez une valeur approchée de*

1. $\ln 2{,}5$
2. $\ln 125$
3. $\ln 0{,}2$
4. $\ln \dfrac{250}{8}$
5. 45 *sachant que vous ne savez plus vos tables de multiplications.*

Croissances comparées

9 - 4 Logarithme et puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *et* $x \in]0,+\infty[$. *On pose* $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

1. **a.** *En posant* $\mathrm{X}=x^\alpha$, *montrez que* $f(x)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}}$.
   b. *Déduisez-en que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.
2. *Soit* $g(x)=x^\alpha \ln x$
   a. *En posant* $\mathrm{X}=1/x$, *exprimez* $g(x)$ *en fonction de* X *et* α.
   b. *Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?*

9 - 5 Exponentielle et puissance

On pose $\varphi(x)=e^x/x^\alpha$.

1. **a.** *Montrez que* $\varphi(x)=e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   b. *Déduisez-en* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$
2. *On pose* $\psi(x)=x^\alpha e^{-x}$
   a. *Démontrez que* $\psi(x)=e^{-x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$
   b. *Qu'en déduisez-vous d'intéressant ?*

Puissance réelle d'un réel

9 - 6 Fonction puissance

Étudiez les fonctions $f_\alpha\ :\ x\mapsto x^\alpha$

9 - 7 Exponentielle de base 2

Étudiez la fonction $\varphi\ :\ x\mapsto 2^x$.

9 - 8 Calcul de limite

Soient α *et* β *deux réels. Étudiez* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$.

Discutez selon le signe de β, *puis selon celui de* α

Exercices divers

9 - 9 Bac avec ROC

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cours suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On rappelle la définition et le théorème suivants :

Définition : *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, +\infty[$, où A est un réel positif, et soit L un nombre réel. Dire que la fonction f a pour limite L en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les nombres f(x) pour x assez grand*

Théorème : *Soit L un nombre réel, f, g et h des fonctions définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$, où A est un réel positif. Si f, g et h vérifient les conditions suivantes :*

- *Pour tout x appartenant à $[A, +\infty[$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;*
- *Les fonctions f et h ont pour limite L en $+\infty$*

alors la fonction f a pour limite L en $+\infty$

1. ***Démonstration de cours :*** *en utilisant la définition précédente, démontrer le théorème énoncé ci-dessus.*
2. ***Application :*** *après avoir étudié la fonction $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x$, démontrez le résultat anoncé en préambule.*

9 - 10 Bac

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** *Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.*
   b. *Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.*
2. **a.** *Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.*
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
   b. *Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.*
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   c. *Préciser la valeur de α_1.*
   d. *Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.*
3. **a.** *Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.*
   b. *Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par*
   $$h(x) = \ln x - x + 1.$$
   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.
   c. *Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.*
4. *Déterminer la limite de la suite (α_n).*

9 - 11 Bac

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. *Étudier les variations de f et de g sur $[0\,;\,+\infty[$.*
2. *En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.*

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. *Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.*
2. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:*
   $$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$
3. *On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.*
   À l'aide de la première partie, montrer que :
   $$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$
4. *Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.*

5. *Étude de la convergence de la suite (u_n).*
   a. *Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.*
   b. *En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.*
   c. *On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.*
   Montrer alors que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

9 - 12 Nombre de chiffres d'un nombre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n est $1+\mathrm{E}(\log n)$ où log représente le logarithme décimal et $\mathrm{E}(x)$ la partie entière d'un réel x.

Encadrez n par deux puissances successives de 10

9 - 13 Équation

Résolvez dans $]0,+\infty[$ l'équation $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

9 - 14 Variations sans dériver

Étudiez et représentez graphiquement la fonction $x \mapsto \ln\left(\ln^2(x^2)\right)$.
Vous éviterez un gros calcul de dérivée.

9 - 15 Dérivées pathologiques

Calculez les dérivées des fonctions définies par

1. $a(x) = \ln(\ln x)$
2. $b(x) = \ln(\ln(\ln(\ln x)))$
3. $c(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

9 - 16 Limites en l'infini

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ de

1. $f_1(x) = x^{1/x}$
2. $f_2(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
3. $f_3(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$
4. $f_4(x) = \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

Pour b) posez t=1/x ; pour c), décomposez l'exposant de e à l'aide d'expressions du type $\ln t/t$

9 - 17 Limites en 0

Étudier les limites quand x tend vers 0^+ de

a) $g_1(x) = x^x$ *b)* $g_2(x) = (x^x)^x$ *c)* $g_3(x) = x^{(x^x)}$

d) $g_4(x) = (-\ln x)^x$ *e)* $g_5(x) = x^2 e^{1/x}$.

d) posez $t = -\ln x$; e) $t=1/x$

9 - 18 Ln et racines

On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

1. *Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez sa parité.*
2. *Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \ln x$*
3. *Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative dans un bon repère.*

9 - 19 Prolongement par continuité

Soit $\varphi : u \mapsto u\ln u$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ? La fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ? Étudiez $\tilde{\varphi}$ et tracez sa représentation graphique.

9 - 20 Logarithme complexe

Soit z appartenant à « un certain ensemble » E. On définit une fonction Loc *qu'on appelle logarithme complexe par*

$$\mathrm{Loc}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

Est-ce que la fonction Loc peut vérifier les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln ? Est-ce qu'elle admet une fonction réciproque ?

9 - 21 Limite en 1

Calculez $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x^2/2+1/2)}{x-1}$

Retour sur les primitives

9 - 22 Calcul de primitives

Complétez le tableau suivant

f	*Je pose* $u =$	*Alors* $u' =$	*Forme de* f *en fonction de* u *et* u'	*Une primitive de* f *est*
$\dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$				
$\dfrac{\cos(2x)}{(3+\sin(2x))^3}$				
$\dfrac{(\ln x)^2}{x}$				
$x\sqrt{x^2-1}$				
$16\dfrac{e^x}{1+2e^x}$				
$\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$				
$\dfrac{1}{x\ln x}$				
$\dfrac{e^x}{(2+e^x)^3}$				
$xe^{-x^2/2}$				
$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$				
$\cos(x)\sin^5(x)$				

9 - 23 Un beau problème utilisant les primitives

La partie A est indépendante de partie B et C.

A - Recherche d'une primitive

Le but de la partie est de trouver une fonction définie et dérivable sur $]-1,1[$ *telle que*

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

1. *Analyse : supposons qu'il existe une telle fonction.*
   - **a.** *Montrez que* $(1) \iff (1-x)f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   - **b.** *Déterminez une primitive* F_1 *de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *sur* $]-1,1[$
   - **c.** *Montrez que* $(1-x)f'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{1-x^2}$
   - **d.** *Déduisez-en une autre primitive* F_2 *de* $x \mapsto (1-x)f'(x)$ *sur* $]-1,1[$ *en fonction de* f.
   - **e.** *Déduisez de b) et c) l'expression de* f *en fonction de* x.
2. *Synthèse : vérifiez que la solution trouvée satisfait les conditions.*

B - Étude de la fonction tangente hyperbolique

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. *Montrez que* φ *est dérivable et calculez* φ'. *Déduisez-en le sens de variation de* φ.
2. *Étudiez limites et asymptotes aux bornes de l'ensemble de définition.*
3. *Dressez le tableau de variation de* φ.
4. *Vérifiez que* $\varphi' = 1 - \varphi^2$.
5. *Déterminez une équation de la tangente à* $\mathcal{C}_\varphi$ *au point d'abscisse 0.*
6. *Montrez que* $\varphi(a+b) = \dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1+\varphi(a).\varphi(b)}$.
7. *Tracé de* $\mathcal{C}_\varphi$, *des asymptotes et de la tangente dans le repère qui va bien.*

C - Fonction argument tangente hyperbolique

1. *Définition de la fonction*
   - **a.** *Montrez que* $\varphi(x) = t$ *admet une unique solution pour tout* $t \in]-1,1[$.
   - **b.** *Montrez que* $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t}$
2. *Étude de la fonction*

   On pose $g :]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
   - **a.** *Montrez que* g *est dérivable et calculez* $g'(x)$.

b. *Déduisez-en les variations de* g.

c. *Déterminez une équation de la tangente à* $\mathcal{C}_g$ *au point d'affixe 0.*

d. *Déterminez limites et asymptotes aux bornes de l'ensemble de définition de* g.

e. *Dressez le tableau de variation de* g.

f. *Tracez* $\mathcal{C}_g$*, les asymptotes et la tangentes sur le même graphique qu'à la question B)7).*

Échelles semi-logarithmiques

9 - 24 Un petit préambule : logarithme décimal

Étudiez brièvement cette fonction et mettez en évidence ses principales propriétés algébriques.

On considère un repère où l'axe des abscisses est gradué comme d'habitude et où l'axe des ordonnées est gradué en échelle logarithmique, c'est à dire qu'une unité étant choisie, la $k-ime$ *unité correspond à une ordonnée de* 10^k.

Représentez dans un tel repère les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto 10^x$
2. $f_2 : x \mapsto 3210^x$
3. $f_3 : x \mapsto 0,3210^x$
4. $f_4 : x \mapsto e^x$
5. $f_5 : x \mapsto e^{-32x}$

9 - 25 Décibels

Définition

Si G est une grandeur et G′ une nouvelle grandeur, les nombres $G' - G$ *ou* G'/G *ou* $G' - G/G$ *peuvent être trop grands ou trop petits pour être interprétés. On utilise alors une échelle logarithmique (de base 10). En supposant G et G′ strictement positifs, on calcule ainsi* $\log_{10} \frac{G'}{G}$ *et le résultat est exprimé en* ***Bel****. On utilise plus couramment* $10 \log_{10} \frac{G'}{G}$ *qui est exprimé en* ***décibel*** *si G et G′ sont des grandeurs utilisées en acoustique, électronique, télécommunications (Bel vient de Graham* Bell*, l'inventeur du téléphone).*

Si $\log_{10} \frac{G'}{G}$ *est positif, on parle de gain et sinon d'atténuation ou de perte.*

Attention aux vendeurs de lave-vaisselle ou d'aéroports !

Soit P_0 *la puissance fournie à l'entrée d'un appareillage et* P_1 *la puissance de sortie.*

1. *On vous dit que l'atténuation de la puissance est de 3 dB. Que peut-on en déduire pour* P_1/P_0 *?*
2. *Que dire du gain en décibels si* $P_1/P_0 = 10$ *?* $= 100$ *?* $= 200$ *?*

9 - 26 Un peu de chimie : pH et pKA

Dans l'eau de Javel, il y a de l'acide hypochloreux $HC\ell O$ *associé à sa base, l'ion hypochlorite* $C\ell O^-$ *: je ne vous apprends rien. Je vous rappelle, mais vous connaissez ça par cœur que* pH *et* pK$_A$ *sont liés par la relation*

$$pH = pK_A + \log_{10} \frac{[Base]}{[Acide]}$$

Étudiez la fonction α *qui au* pH *associe le rapport* $\frac{[Base]}{[Acide]}$ *ainsi que la fonction* β *qui au* pH *associe le rapport* $\frac{[Acide]}{[Base]}$ *sachant que le* pK$_A$ *de notre couple vaut 7,3.*

Tracez les représentations de ces deux fonctions sur un même graphique et interprétez chimiquement.

9 - 27 Fonctions de transfert en électronique

Un circuit peut être caractérisé par sa fonction de transfert T *dépendant de la pulsation* ω *de la tension sinusoïdale.*

On s'intéresse souvent à la courbe de gain associée représentant la fonction

$$G : \omega \mapsto 20 \log |T(\omega)|$$

où le gain G est exprimé en décibels.

Par commodité, l'axe des ordonnées est gradué en échelle décimale, et l'axe des abscisses ω *est gradué en échelle log.*

1. ***Un exemple*** *Représentons la courbe de gain de la fonction*

$$T_1 : \omega \mapsto j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Tout d'abord, rappelez-vous qu'en électronique, j *représente le nombre de carré* -1.

$G_1(\omega) = 20 \log |T_1(\omega)| = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$*. L'axe des abscisses étant gradué en échelle log, on pose* $x = \log \omega$*, alors le gain est représenté par la courbe d'équation*

$$y = 20x - 20 \log \omega_0$$

qui est donc une droite qu'on notera dans la suite du problème $(\mathcal{D})$ *. On dit que sa pente est de 20 décibels par décade.*

Pour la tracer, on peut déterminer les coordonnées de deux points :

– *pour* $\omega = \omega_0$, $G_1(\omega) = 20 \log 1 = 0$

– *pour* $\omega = 10\omega_0$, $G_1(\omega) = 20 \log 10 = 20$

2. *On va s'intéresser maintenant à la fonction*

$$T_2 : \omega \mapsto 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$$

a. *Regardez ce qui se passe au voisinage de 0, c'est à dire étudiez la limite de G_2 lorsque ω tend vers 0 et interprétez graphiquement.*

b. *Que sentez-vous au voisinage de $+\infty$? Montrez que $(\mathcal{D})$ est asymptote à la courbe représentative de G_2 au voisinage de $+\infty$.*

3. *Essayez de vous débrouillez avec*

$$T_3 : \omega \mapsto \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

(ya une ruse...)

9 - 28 Étude du pont de Wien

Il s'agit d'un circuit obtenu en plaçant en séries deux filtres F_1 et F_2, F_1 étant un filtre R-C série et F_2 un filtre R-C en parallèle. Les deux resistances sont identiques et les deux condensateurs aussi. L'entrée est une tension $e(t)$ de pulsation ω, la sortie étudiée est la tension aux bornes de la résistance placée dans le filtre F_2.
Dans tout le problème, on posa $\tau = RC$ et la fonction de transfert est notée $T(j\omega)$, avec $j^2 = -1$.
Vous verrez peut-être un jour que la notion de pont diviseur permet d'obtenir que

$$T(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{j^2\tau^2\omega^2 + 3j\omega\tau + 1}$$

1. *Commencez par faire le schéma du circuit pour faire savant.*

2. *On pose à présent $x = \omega\tau$*

a. *Montrez que*

$$|T(j\omega)| = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$

On posera par la suite, pour simplifiez encore nos notations (qui deviennent aussi nombreuses que les personnages dans un roman russe)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}$$

b. *Calculez et écrivez sous la forme la plus simple possible la dérivée de f par rapport à x.*

3. *La fonction de gain normalisée est définie par*

$$G(x) = 20\log|f(x)|$$

On désigne par S la courbe associée à G dans un repère semi-log, x étant porté sur l'échelle logarithmique.

a. *Montrez que $G(1/x) = G(x)$. Comment sont représentés l'un par rapport à l'autre les points images de x et $1/x$ sur l'échelle logarithmique ? Déduisez-en une propriété géométrique de S.*

b. *Calculez $\lim_{x\to+\infty} G(x) + 20\log(x)$. Interprétez ce résultat.*

c. *Construisez S.*

9 - 29 Musique, complexes et logarithmes

On définit le logarithme de base 2 d'un réel strictement positif par $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Dans la suite du problème, $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Préliminaire

1. *Étudiez les variations de la fonction $\log_2$.*

2. *Calculez $\log_2(32)$. Que dire de $\log_2(x)$ si le réel x est compris entre 2^n et 2^{n+1} ?*

3. *On suppose que $E(x) = n$. Calculez $E(x+1)$ en fonction de n.*

La la la la

La fréquence rapportée de la fréquence f à l'intervalle $[1,2[$ est le nombre $r(f)$ défini de la façon suivante : soit p un entier tel que $2^p \leqslant f$ et $f < 2^{p+1}$, le nombre f appartenant à $[1,+\infty[$; alors $r(f) = 2^{-p}f$.

1. *Montrez que $r(f) = 2^{-E(\log_2(f))}f$*

2. *On dit qu'une fonction φ est multiplicativement périodique de période T $(T > 0)$ si, pour tout réel t, on a $\varphi(Tt) = \varphi(t)$.*
Montrez que la fonction r est multiplicativement périodique de période 2.
On suppose que $r(f_1) = r(f_2)$: peut-on en déduire qu'il existe un entier relatif p tel que $f_1 = 2^p f_2$?
Quelle est la fréquence rapportée de $f = 203$?

3. *À la fréquence f on associe le point M du plan complexe d'affixe $z(f) = f e^{2i\pi\log_2(f)}$.*
On dit que deux sons de fréquences f_1 et f_2 déterminent la même note si et seulement si $z(f_1)$ et $z(f_2)$ ont le même argument.
Montrez alors que $r(f_1) = r(f_2)$. la réciproque est-elle vraie ?

4. *On considère un LA à la fréquence $f_0 = 440$. On note $\zeta = 2^{1/12}$. On définit la suite des demi-tons montant du LA 440 de la façon suivante*

$$f_0 = 440 \qquad f_{n+1} = \zeta f_n$$

Que pouvez-vous dire de cette suite ?
Établissez que $f_{n+12} = 2f_n$ et interprétez physiquement cette relation.
La suite des notes, à partir du LA 440, obtenu par demi-tons montant est LA#, SI, DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, ...
À quelle note correspond un son de fréquence $f = 18794$?

Exercices de Bac

9 - 30 Bac

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthononnal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a. *Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.*

   b. *Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.*
   Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T); la réaliser sur la figure en annexe).

2. ***Restitution organisée de connaissances***
   On suppose connue la propriété :
   « Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a
   $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
   En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a
   $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

3. *Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).*

9 - 31 Bac

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a :\ x^a = a^x.$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. *Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2..*

2. *Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.*

3. *On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.*
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - e\ln x$.

   a. ***Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.*
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

   b. *Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.*

   c. *Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*

   d. *Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.*

II Résolution de l'équation E_a

1. *Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.*

2. *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.*

   a. *Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.*

   b. *Ëtudier les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*

   c. *Dresser le tableau des variations de la fonction f.*

   d. *Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).*

3. *Justifier à l'aide des résultats précédents le spropositions (P_1) et (P_2) suivantes :*

   (P_1) : si $a \in]0\ ;\ 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

   (P_2) : si $a \in]1\ ;\ e[\ \cup\ ]e\ ;\ +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e\ ;\ +\infty[$.

9 - 32 Bac

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. *On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.*

2. *Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose* $\mathrm{N}(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$.
Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
Calculer $\mathrm{N}(0)$. *En déduire les variations de f.*
3. *Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.*

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. *Démontrer que si $x\in[0\ ;\ 4]$, alors $f(x)\in[0\ ;\ 4]$.*
2. *On considère la suite (u_n) définie par :*

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \text{ et} \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a. *Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.*
   b. *Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n\in[0\ ;\ 4]$.*
   c. *Étudier la monotonie de la suite (u_n).*
   d. *Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.*
   e. *Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.*

9 - 33 Bac

1. *Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :*

$$f_n(x)=\ln x+\frac{x}{n}-1.$$

   a. *Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.*
   b. *Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.*
2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.*
   a. *Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.*
   b. *Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.*
   c. *Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.*
   d. *Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).*
3. a. *Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.*
   b. *Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que :*
   $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.
   c. *Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).*
   d. *Montrer que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln\ell=1$ et en déduire la valeur de ℓ.*

Résolution de ces exercices de Bac assistée par XCAS

9 - 30 Résolution complète avec XCAS

1. a. *On commence par créer deux paramètres a et b qu'on fera varier à l'aide de curseurs :*

```
assume(a:=[5,0.01,10])// a varie
    entre 0.01 et 10 et 5 est sa
    1ere valeur
assume(b:=[5,0.01,10])// idem
    pour b
```

Puis (C), la courbe représentative de la fonction ln :

```
C:=graphe(ln(x))
```

On crée ensuite le point A de la courbe (C) d'abscisse a :

```
A:=point(a,ln(a))
```

ainsi que la tangente à (C) en A :

```
T:=tangente(C,A)
```

On note au passage qu'on obtient son équation formelle en fonction de a.

   b. *On crée ensuite les points B, Q et R :*

```
B:=point(b,ln(b))
Q:=point(0,ln(a))
R:=point(0,ln(b))
```

On crée également le point P, intersection de (T) avec l'axe d'équation $x=0$:

```
P:=inter_unique(T,droite(x=0))
```

On demande son ordonnée, en fonction de a :

```
ordonnee(P)
```

On calcule la longueur PQ :

```
simplifier(longueur(P,Q))
```

3. « Développons » l'ordonnée du point G en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$, c'est-à-dire en fonction des ordonnées de A et B :

```
lnexpand((ln(sqrt(a*b))))
```

G est donc le point de (C) de même ordonnée que le milieu de $[PQ]$ que nous appellerons S :

```
S:=milieu(Q,R)
d:=droite(y=(ordonnee(S)))
G:=inter_unique(d,C)
```

Vérifions que G est bien le point cherché :

```
abscisse(G)
```

qui nous redonne bien $\ln\left(\sqrt{ab}\right)$

9 - 31 Résolution guidée

On précise que a et x doivent être strictement positifs :

```
assume(a>0) ;assume(x>0)
```

Tant qu'on y est, on demande à **XCAS** s'il connaît une solution exacte générale à notre problème :

```
resoudre(a^x=x^a,x)
```

Pas de chance...
Introduisons donc la fonction dépendant de x et a :

```
E(x,a):=a^x-x^a
```

Comment peut-on alors reformuler notre problème en utilisant cette fonction ?

I Étude de quelques cas particuliers

1. Utilisez la fonction E précédemment introduite pour répondre à la question.
2. Idem.
   b) On introduit la fonction h de la manière habituelle :

   ```
   h(x):=x-e*ln(x)
   ```

   et on demande les limites... de la manière habituelle. Par exemple :

   ```
   limite(h(x),x=0)
   ```

   c) On crée la fonction dérivée de h que nous noterons h_p :

   ```
   hp:=fonction_derivee(h):;
   ```

   On factorise pour étudier son signe :

   ```
   factoriser(hp(x))
   ```

   et on résout l'équation $h_p(x) > 0$:

   ```
   resoudre(hp(x)>0,x)
   ```

   d) On en déduit le tableau de variation et on calcule $h(\mathrm{e})$:

   ```
   h(e)
   ```

II Résolution de l'équation E_a

2. **a.** On définit f et on calcule ses limites de la manière habituelle. Attention, on veut la limite à droite en 0, donc on précise 1 en troisième argument (pour la limite à gauche, on rentre -1) :

   ```
   limite(f(x),x=0,1)
   ```

   b. On calcule $f_p(x)$ de la manière habituelle. Attention ! Puisque cette fois le résultat est une fraction, nous n'utiliserons pas `simplifier` ni `factoriser` mais `normal` qui est moins puissant mais qui permet de garder un dénominateur factorisé :

   ```
   normal(fp(x))
   ```

   On résout ensuite $f_p(x) > 0$... de la manière habituelle.

   d) Il suffit de rentrer

   ```
   graphe(f(x),x=0..100)
   ```

9 - 32 Résolution guidée

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1. On définit f et sa dérivée f_p comme d'habitude.
2. On reconnaît comme d'habitude dans les exercices de Bac le numérateur de la dérivée de f.

   ```
   N(x):=numer(fp(x))
   ```

   On étudie le signe de sa dérivée comme d'habitude.
   On calcule $\mathrm{N}(0)$.
3. On utilise la commande `resoudre` pour obtenir la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Connaissant le sens de variation de f et connaissant

```
f(0);f(4);f(4.0)
```

on déduit le résultat en dressant un joli tableau.

2. **a.** On rentre :

```
graphe_suite(f(x),4,3)
```

puisque $u_0 = 4$ et qu'on s'arrête à u_3.

c) On étudie le signe de $f(x) - x$:

```
resoudre(f(x)-x>0)
```

... et on conclue connaissant le signe de $u_1 - u_0$

```
f(4.0)-4
```

Ou on peut être plus courageux et déterminer une procédure calculant u_n pour tout entier n :

```
u(n):={
si n==0 alors 4.0 sinon
f(u(n-1));
fsi;
}:;
```

9 - 33 Et un dernier pour la route

1. **a.** On définit une fonction f dépendant de n et x, en précisant que n est un entier naturel :

```
assume(n,integer) and assume(n>0)
f(n,x):=ln(x)+x/n-1
```

Puis on calcule les limites comme d'habitude.

Pour la dérivée, on peut essayer une variante pour changer en calculant l'expression de $f_n'(x)$:

```
deriver(f(n,x))
```

dont le signe est sans mystère.

2. et 3. On crée une procédure qui fait tout !

```
alpha(N):={
local f;
A:=point(0,1);
B:=point(N,0);
Delta:=droite(A,B);
Gamma:=graphe(ln(x),couleur=rouge);
f(x):=ln(x)+x/N-1;
a:=fsolve(f(x)=0,x,N); // a est donc
    alpha_n
D:=couleur(droite(x=a),bleu); // pour
    verifier que les alpha_n coincident
print("alpha("+N+")="+a);
A,B,Delta,Gamma,D;
}:;
```

On crée ensuite un paramètre n qu'on fera varier au curseur :

```
k:=element(1 .. 100)
```

Mais pour être sûr d'avoir un entier, on prend sa partie entière en utilisant `floor` :

```
K:=floor(k)
```

Ensuite on demande α_K en faisant varier K :

```
alpha(K)
```

Bac 2009

9 - 34 Bac

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

9 - 35 Bac

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1. *Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
2. *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
3. *Vérifier que : $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.*

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1. *Étude de quelques propriétés de la fonction g.*
   a. *Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
   b. *En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.*
   c. *Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.*
2. *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.*
   a. *En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.*
   b. *En déduire que la suite (u_n) converge vers α.*
3. *Recherche d'une valeur approchée de α*
   a. *À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.*
   b. *On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à $5 10^{-4}$ près de α.*
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

9 - 36 Bac

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x,\ [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0{,}69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. *On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par*
   $$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$
   a. *Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.*
   b. *En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.*
   c. *En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.*
2. *Soit n un entier naturel non nul.*
   On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$
   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

9 - 37 Bac

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right).$$

PARTIE A

1. *Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*
2. *Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.*
   a. *Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*
   b. *Montrer que sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.*
   Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} .
   c. *Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.*

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+l} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. *À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.*
2. *Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.*
3. **a.** *Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.*
   b. *Démontrer que la suite (u_n) converge.*
   c. *Déterminer sa limite.*

Bac 2010

9 - 38

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. *Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.*
2. **a.** *Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$.*
   On note α cette solution.
   b. *À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.*
3. *Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.*
4. *Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.*

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. *Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.*
2. *En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.*

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note :

- *Γ la courbe représentative de la fonction $\ln$ (logarithme népérien) ;*
- *A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;*
- *M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.*

1. *Montrer que la distance AM est donnée par $\mathrm{AM} = \sqrt{f(x)}$.*
2. *Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.*
   a. *Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.*
   b. *Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.*
   c. *Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.*
3. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

9 - 39

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. *Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.*
2. *Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.*
3. *Dresser le tableau de variations de la fonction g.*

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\varepsilon^n}{n^n}$.

1. *Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :*
   a. *le sens de variation de la suite (u_n) ;*
   b. *la limite éventuelle de la suite (u_n).*
2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.*
   a. *Montrer que $v_n = n - n\ln n$.*
   b. *En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).*
   c. *En déduire le sens de variation de la suite (u_n).*
3. *Montrer que la suite (u_n) est bornée.*
4. *Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*

9 - 40

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. *Étudier le sens de variation de la fonction f.*
   b. *Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*
2. *On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.*
   a. *Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.*
   b. *Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.*
   c. *Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.*
   d. *Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle [2 ; 3].*
   e. *À l'aide des questions précédentes, détenniner le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D.*

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$

1. *Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.*
2. *La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.*